ИЗДАТЕЛЬСТВО
журн. „Народный Учитель“.
Москва, Твер. заст., Царский, 4, тел. 3.05.19.

К. ЛЕБЕДИНЦЕВ.

МАТЕМАТИКА
В
НАРОДНОЙ ШКОЛЕ.

ВТОРОЕ ИЗДАНИЕ.

МОСКВА
1919 г.

ИЗДАТЕЛЬСТВО
журн. „НАРОДНЫЙ УЧИТЕЛЬ".
Москва, Твер. Заст., Царскій 4, тел. 3-05-19.

К Ф Лебединцев

МАТЕМАТИКА
в
НАРОДНОЙ ШКОЛЕ.

(ПЕРВАЯ СТУПЕНЬ)

МОСКВА.

Тип. В. Ц. С. П. С. Петровка, 17.

ОТЪ АВТОРА.

Въ настоящее время нельзя еще сказать, какой окончательный видъ приметъ реформа нашей школы, но одно несомнѣнно: школа должна быть близкой къ жизни дѣтей и къ ихъ запросамъ, и методъ обученія долженъ быть основанъ на самодѣятельности учащихся, на трудовомъ началѣ, на конкретныхъ впечатлѣніяхъ. И въ области начальной математики настало время осуществить тѣ измѣненія, необходимость которыхъ уже многими сознавалась въ послѣдніе годы.

Но эта реформа въ конечномъ счетѣ будетъ и должна быть дѣломъ рукъ самого учителя. Только самъ учитель въ своей живой педагогической работѣ можетъ выяснить, какія сѣмена новаго могутъ плодотворно произрасти и дать обильные плоды на нашей школьной нивѣ, и что изъ стараго должно быть сохранено, какъ неутратившее своей цѣнности. Но для того, чтобы учитель могъ выполнить эту творческую роль, онъ долженъ быть въ курсѣ современныхъ теченій методики и современной литературы, и настоящая книжка имѣетъ въ виду оказать ему посильную помощь въ этомъ дѣлѣ.

Небольшіе размѣры книжки даютъ возможность остановиться только на нѣкоторыхъ важнѣйшихъ вопросахъ методики математики въ начальной школѣ и характеризовать ихъ лишь въ наиболѣе существенныхъ чертахъ. Но въ послѣдней главѣ данъ перечень произведеній современной литературы, знакомство съ которой позволитъ учителю изучить интересующіе его вопросы въ возможно болѣе полномъ объемѣ.

К. Лебединцевъ.

ГЛАВА I.

Цѣли, программа и методъ обученія математикѣ въ начальной школѣ.

Въ настоящее время всѣ сознаютъ, что постановка обученія математикѣ въ начальной школѣ нуждается въ серьезныхъ измѣненіяхъ. Но для того, чтобы эти измѣненія были цѣлесообразны и отвѣчали требованіямъ жизни и современной педагогической мысли, нужно, чтобы для школы и учителя былъ ясенъ вопросъ, зачѣмъ изучается математика, и чему и какъ учить дѣтей на урокахъ, ей посвящаемыхъ. Вотъ почему я считаю нужнымъ прежде всего остановиться на вопросѣ о цѣляхъ, программѣ и методѣ обученія математикѣ въ начальной школѣ.

Принято думать, что обученіе математикѣ въ начальной школѣ преслѣдуетъ двѣ цѣли: матеріальную—сообщить извѣстный рядъ свѣдѣній и навыковъ, необходимыхъ и полезныхъ для жизни, и формальную—содѣйствовать умственному развитію учащихся. Въ то время, какъ первая цѣль является общепонятной и безспорной—въ необходимости умѣть производить вычисленія и имѣть простѣйшія геометрическія свѣдѣнія и измѣрительные навыки никто не сомнѣвается,—вторая цѣль, формальная, если призадуматься надъ этимъ вопросомъ, можетъ вызвать нѣкоторыя сомнѣнія и недоумѣнія. Что собственно утверждаемъ мы, когда говоримъ, что изученіе математики содѣйствуетъ умственному развитію учащихся? Всякое ли обученіе счисленію или другимъ отдѣламъ математики оказываетъ полезное вліяніе на умственное развитіе дѣтей, и если нѣтъ, то каковъ долженъ быть методъ обученія, чтобы достигалась эта желаемая цѣль? Вотъ вопросы, которые мы должны выяснить себѣ, чтобы имѣть руководящую нить въ дальнѣйшемъ.

Когда говорятъ, что занятія математикой содѣйствуютъ умственному развитію учащихся, то этимъ обыкновенно хотятъ сказать, что человѣкъ, изучавшій математику, по сравненію съ человѣкомъ не изучавшимъ ея, окажется, при прочихъ равныхъ условіяхъ, болѣе способнымъ составлять правильныя сужденія, умозаключенія и выводы не только въ области математики, но и въ другихъ областяхъ науки и жизни.

Это утвержденіе должно бы быть обосновано или на результатахъ опыта, или на данныхъ психологическаго анализа. Но прямыхъ опытовъ, которые подтверждали бы такую роль математики въ дѣлѣ умственнаго развитія, мы не имѣемъ: экспериментальная психологія и педагогика трудятся пока еще надъ разрѣшеніемъ болѣе простыхъ задачъ, и если мы можемъ разсчитывать въ будущемъ на освѣщеніе интересующаго насъ вопроса экспериментальными данными, то въ настоящемъ такихъ данныхъ у насъ еще нѣтъ. Данныя же простого наблюденія говорятъ намъ, что есть дѣти, которыя съ успѣхомъ обучаются счисленію и въ то же время оказываются малоспособными въ другихъ областяхъ знанія; есть знаменитые счетчики, которые съ поразительной быстротой и ловкостью выполняютъ очень сложныя вычисленія, и въ то же время не проявляютъ выдающихся способностей въ другихъ отношеніяхъ, даже являются людьми малообразованными; есть наконецъ, выдающіеся математики, которые обнаруживаютъ весьма невысокій умственный уровень, когда имъ приходится составлять сужденія въ какой либо области знаній за предѣлами своей спеціальности. Наличность такихъ фактовъ односторонняго, спеціальнаго умственнаго развитія въ области математики заставляетъ заключить, что изученіе математики можетъ и не сопровождаться всестороннимъ умственнымъ развитіемъ, и что обычное представленіе о формально развивающемъ значеніи математики нуждается въ серьезныхъ поправкахъ. Обратимся теперь къ даннымъ психологическаго анализа. Въ современной психологіи имѣются нѣкоторыя основанія думать, что упражненіе какого либо частнаго вида данной психической функціи сопровождается развитіемъ не только этого вида функціи, но и другихъ ея видовъ, или, какъ иначе говорятъ, сопровождается сопутствующимъ упражненіемъ соотвѣтственной общей функціи. Такъ напр. Мейманъ, производя эксперименты надъ памятью, нашелъ, что упражненіе въ заучиваніи безсмысленныхъ слоговъ сопровождается усиленіемъ памяти не только на безсмысленные слоги, но также нѣкоторымъ усиленіемъ всѣхъ другихъ видовъ памяти, причемъ это «сопутствующее упражненіе» болѣе всего сказывалось на видахъ памяти, родственныхъ съ даннымъ, напр., памяти на отдѣльныя буквы, цифры, вообще при усвоеніи матеріала, запоминаемаго болѣе или менѣе механически; на остальныхъ же видахъ памяти «сопутствующее упражненіе» сказывалось въ меньшей и меньшей мѣрѣ. При этомъ Мейманъ прибавляетъ, что это явленіе—сопутствующее упражненіе родственныхъ видовъ дѣятельности—«есть вѣроятно общее психофизическое явленіе, такъ какъ мы наблюдаемъ его во всѣхъ психофизическихъ и психическихъ функціяхъ» (Мейманъ—Лекціи по экспериментальной педагогикѣ, т. III, стр. 237—241).

Эти взгляды Меймана не являются общепризнанными въ психологіи; есть ученые, которые ихъ оспариваютъ; но если даже считать положенія Меймана безспорными, то и на нихъ нельзя обосновать традиціонной вѣры въ формально-развивающую силу математики. Въ самомъ дѣлѣ, исходя изъ вышесказаннаго, мы можемъ считать вѣроятнымъ, что изученіе математики сопровождается развитіемъ не только математическаго мышленія, но и другихъ видовъ мышленія, болѣе или менѣе родственныхъ съ нимъ. Вся суть теперь въ томъ, какіе же виды мышленія мы можемъ считать родственными съ математическимъ. Такъ какъ въ математикѣ мы имѣемъ дѣло преимущественно съ умозаключеніями, съ дедукціей, то мы вправѣ ожидать, что изученіе математики отразится болѣе или менѣе благодѣтельно на развитіи дедуктивныхъ видовъ мышленія, возможность же сопутствующаго упражненія въ области индуктивнаго мышленія будетъ маловѣроятна и во всякомъ случаѣ весьма ограничена, такъ какъ въ математикѣ индукція требуетъ сравнительно небольшого числа простыхъ наблюденій, въ другихъ же областяхъ знанія и жизни она должна опираться на многочисленныя и сложныя наблюденія и опыты.

А кромѣ того и самый процессъ умозаключенія и вообще дедуктивнаго мышленія не можетъ считаться простымъ психическимъ актомъ, всегда тождественнымъ во всевозможныхъ случаяхъ. Постараюсь пояснить это примѣрами.

Пусть школьникъ рѣшаетъ задачу: «Поѣздъ желѣзной дороги проходитъ 35 верстъ въ каждый часъ; сколько верстъ пройдетъ онъ за 12 часовъ»? Пусть онъ разсуждаетъ при этомъ такъ: «въ первый часъ поѣздъ проходитъ 35 верстъ, да во второй еще 35 верстъ, да въ третій еще 35 верстъ и т. д.; чтобы узнать, сколько верстъ онъ пройдетъ за всѣ 12 часовъ, нужно 35 верстъ умножить на 12». Если бы школьникъ могъ облечь свою мысль въ форму полнаго умозаключенія, то онъ долженъ былъ бы выразиться примѣрно такъ: «если въ задачѣ приходится складывать нѣсколько одинаковыхъ чиселъ, то эта задача рѣшается умноженіемъ; въ этой задачѣ приходится складывать 12 разъ по 35 верстъ; поэтому нужно 35 верстъ умножить на 12». Чтобы нашъ школьникъ дѣйствительно могъ построить свое умозаключенiе, даже въ той упрощенной формѣ, какъ сказано выше (и какъ обыкновенно выражаются при рѣшенiи задачъ), для этого необходимы двѣ психологическiя предпосылки: во первыхъ, онъ долженъ замѣтить, что въ данной задачѣ приходится складывать 12 одинаковыхъ чиселъ, каждое изъ которыхъ есть 35; во вторыхъ, онъ долженъ помнить изъ предыдущаго своего факта, что задачи, въ которыхъ приходится складывать одинаковыя числа, рѣшаются умноженiемъ. Иначе говоря, въ его умѣ должна существовать прочная ассоцiацiя между замѣченнымъ фактомъ и необходимостью произвести умноженiе по извѣстнымъ правиламъ.

Съ этимъ умозаключенiемъ сравнимъ другое. Пусть тотъ же школьникъ въ лѣтнiй день соображаетъ: «Вонъ какъ паритъ, и тучи собираются; пожалуй, будетъ гроза». Еслибы онъ и здѣсь могъ облечь свою мысль въ форму полнаго умозаключенiя, то сказалъ бы приблизительно такъ: «если въ лѣтнiй день особенно душно и притомъ собираются тучи, то можно ждать грозы; сегодня сильно паритъ и тучи собираются; поэтому вѣроятно, что сегодня будетъ гроза». Чтобы подобный силлогизмъ (хотя и въ неполной формѣ, какъ это постоянно бываетъ) могъ дѣйствительно сложиться въ умѣ нашего школьника, необходимы опять двѣ психологическiя предпосылки: во первыхъ, онъ долженъ замѣтить, что сегодня болѣе душно, чѣмъ обыкновенно въ лѣтнiе дни, и что притомъ на небѣ собираются тучи; во вторыхъ, онъ долженъ помнить изъ предыдущихъ своихъ наблюденій, что въ подобные дни часто бываетъ гроза, т. е. въ его умѣ должна существовать ассоціація между испытываемыми температурными, зрительными и другими ощущеніями и представленіемъ возможности грозы.

Возьмемъ еще и третье умозаключеніе того же школьника, въ такомъ родѣ: «Былъ звонокъ; пора идти въ классъ». Чтобы такое умозаключеніе пришло на умъ нашему школьнику, онъ долженъ, во первыхъ, услышать звонокъ; во вторыхъ, онъ долженъ помнить, что звонокъ во время перемѣны или отдыха есть призывъ идти въ классъ на занятія, т.-е. у него должна сложиться въ умѣ прочная ассоціація между услышаннымъ въ перемѣну звонкомъ и сознаніемъ необходимости идти въ классъ. И вообще, чтобы въ нашемъ умѣ могло возникнуть какое нибудь умозаключеніе, необходимы всякій разъ тѣ же двѣ психологическія предпосылки: во 1-хъ, мы должны установить какой-нибудь опредѣленный фактъ (какъ напр., въ предыдущихъ умозаключеніяхъ: наличность равныхъ слагаемыхъ, или наличность духоты въ воздухѣ и тучъ на небѣ, или фактъ раздавшагося звонка); во 2-хъ, представленіе объ этомъ установленномъ фактѣ должно быть связано въ нашемъ умѣ прочными ассоціаціями съ другими представленіями. Но для установленія опредѣленнаго факта необходимо всякій разъ предварительное наблюденіе, или самонаблюденіе, т.-е. такой психическій процессъ, который совершается черезъ посредство дѣятельности различныхъ органовъ чувствъ и различныхъ сторонъ нашей психической жизни, да и ассоціаціи, которыя необходимы для возникновенія силлогизма, могутъ относиться къ совершенно различнымъ областямъ представленій. Поэтому мы не можемъ считать различныя умозаключенія всегда тождественными психическими процессами, и не всѣ виды дедуктивнаго мышленія можемъ считать одинаково родственными другъ другу. А отсюда вытекаетъ важный выводъ, что не всѣ виды дедуктивнаго мышленія могутъ подвергаться вліянію сопутствующаго упражненія отъ изученія математики. Можно напр., ожидать, что изученіе математики облегчаетъ составленіе правильныхъ сужденій въ области физики, но надѣяться на то, что человѣкъ, изучившій математику, тѣмъ самымъ пріобрѣтетъ смѣтливость и сообразительность во всѣх областяхъ жизни, можно было бы въ такой же малой степени, какъ ожидать, что искусный игрокъ въ шахматы долженъ быть непремѣнно хорошимъ полководцемъ.

Развитое математическое мышленіе, съ точки зрѣнія общепедагогической, есть хотя и весьма важный, но спеціальный навыкъ; а общее умственное развитіе можетъ быть пріобрѣтено только болѣе или менѣе равномѣрной работой въ различныхъ областяхъ знанія.

Изъ всего вышеизложеннаго можно сдѣлать важные педагогическіе выводы. То вліяніе, которое можетъ оказывать обученіе счисленію и вообще математикѣ на умственное развитіе дѣтей, находится въ прямой зависимости отъ матеріала, которымъ мы пользуемся при обученіи: если въ учебномъ матеріалѣ будутъ исключительно преобладать отвлеченныя упражненія въ дѣйствіяхъ и хитроумныя задачи съ условіями, лишенными внутренней связи и по существу далекими отъ жизни,—то упражняя учащихся на такомъ матеріалѣ, мы можемъ быть и усовершенствуемъ ихъ умъ въ отношеніи разгадыванія разныхъ ребусовъ и головоломокъ, но отнюдь не сдѣлаемъ ихъ болѣе способными къ правильному мышленію въ жизни или въ какой либо области знанія. Если же мы хотимъ, чтобы умственное развитіе дѣтей, обучающихся счисленію или другому отдѣлу математики, получило возможно болѣе продуктивный характеръ, то мы должны для этой цѣли такъ подбирать учебный матеріалъ, чтобы онъ имѣлъ прямую и тѣсную связь со всевозможными явленіями окружающей дѣйствительности; только въ этомъ случаѣ въ умѣ учащихся можетъ образоваться подборъ тѣхъ ассоціацій, на которыя будетъ опираться ихъ дальнѣйшее мышленіе.

Такимъ образомъ приходится признать, что формальная цѣль обученія счисленію и вообще математикѣ—возможное содѣйствіе умственному развитію дѣтей—совершенно неотдѣлима отъ матеріальной цѣли—сообщенія извѣстныхъ познаній и навыковъ необходимыхъ для жизни. Преслѣдуя эту матеріальную цѣль, сообщая учащимся свѣдѣнія и навыки, необходимые для практическихъ надобностей мы тѣмъ самымъ разовьемъ, насколько возможно, и умственныя ихъ способности,—конечно, при одномъ необходимомъ условіи: если методъ обученія будетъ способствовать сознательному, а не механическому усвоенію учебнаго матеріала.

Какой же кругъ познаній и навыковъ изъ области математики мы должны считать подходящимъ для современной начальной школы? Иначе говоря, какъ должна быть измѣнена программа начальной математики, чтобы школа могла удовлетворить въ этомъ отношеніи требованіямъ современной жизни?

Въ прежнее время, при трехлѣтнемъ курсѣ начальной школы, матеріальная цѣль обученія ариѳметикѣ сводилась къ одному: научить дѣтей четыремъ дѣйствіямъ надъ цѣлыми числами и рѣшеніи соотвѣтствующихъ задачъ. Знакомство съ дробями вводилось лишь въ самыхъ ограниченныхъ размѣрахъ—поскольку безъ него нельзя обойтись въ повседневныхъ разсчетахъ. Знакомство съ мѣрами сводилось по большей части къ упражненіямъ и задачамъ съ составными именованными числами, выработка же навыковъ измѣрительнаго характера не входила въ задачи обученія въ начальной школѣ. Да и трудно было задаваться болѣе широкими цѣлями при ограниченности времени, имѣвшагося въ распоряженіи учителя, и при необходимости обращать усиленное вниманіе на подготовку къ окончательному экзамену учащихся послѣдняго года обученія, нерѣдко въ ущербъ образовательнымъ задачамъ школы.

Такіе размѣры курса математики и въ прежнее время были недостаточны, а тѣмъ болѣе нельзя ограничиваться такими рамками теперь. Жизнь требуетъ отъ широкихъ круговъ населенія не только умѣнья составить или провѣрить лавочный счетъ или подвести итогъ приходо-расходной книги, но и умѣнья опредѣлить размѣры того или иного участка земли, подсчитать количество сѣмянъ, необходимыхъ для его засѣва, составить планъ веденія хозяйства и опредѣлить его доходность или убыточность; подсчитать размѣры и стоимость той или иной постройки, количество или вѣсъ нужныхъ для этого бревенъ, досокъ или кирпича, желѣза для крыши; сообразить выгоду того или иного помѣщенія капитала въ предпріятіе, размѣры дохода отъ вклада въ сберегательную кассу; подсчитать распредѣленіе прибыли или взносовъ между членами кооператив , и т. д. А для всего этого необходимо знакомство съ дѣйствіями не только надъ цѣлыми числами, но и надъ дробями, простыми и десятичными, и съ простѣйшими процентными вычисленіями; необходимы навыки въ производствѣ элементарныхъ измѣреній длины, вѣса, въ вычисленіи различныхъ площадей и объемовъ, а слѣдовательно нужно знакомство и съ важнѣйшими геометрическими формами и элементарными свойствами фигуръ и тѣлъ. Необходимо также знакомство и съ метрическими мѣрами, которыя проникаютъ уже въ нашъ жизненный обиходъ, и, конечно, будутъ получать все большее распространеніе по мѣрѣ развитія связей съ другими странами. Такъ какъ теперь въ начальной школѣ устанавливается четырехлѣтній и даже пятилѣтній курсъ, то времени найдется достаточно для выполненія этихъ задачъ, особенно, если отказаться отъ ненужныхъ упражненій на составныя именованныя числа и отъ рѣшенія задачъ громоздкаго и искусственнаго характера, переполняющихъ многіе употребительные нынѣ задачники.

Знакомство съ мѣрами и дробями, а также пріобрѣтеніе измѣрительныхъ навыковъ и свѣдѣній геометрическаго характера, должно быть распредѣлено по всему школьному курсу, начиная съ первыхъ его ступеней и притомъ въ тѣсной связи съ обычнымъ курсомъ счисленія. Только при этомъ условіи обученіе математикѣ будетъ опираться на тѣ числовыя и измѣрительныя соотношенія, которыя окружаютъ ребенка въ его повседневной жизни, и даетъ ему возможность примѣнять выробатываемые навыки и усваиваемыя свѣдѣнія къ рѣшенію разнаго рода математическихъ вопросовъ, возникающихъ изъ жизни.

Въ общемъ, распредѣленіе учебнаго матеріала при четырехлѣтнемъ курсѣ можетъ быть сдѣлано приблизительно такъ:

1-й годъ. Всѣ дѣйствія надъ числами первыхъ двухъ десятковъ. Круглые десятки первой сотни. Нумерація чиселъ первой сотни; сложеніе и вычитаніе въ предѣлѣ первой сотни.

Простѣйшія дроби (половина, четверть, восьмая; треть, шестая доля и составляемыя изъ нихъ дроби); вычисленія надъ ними, выполняемыя наглядно.

Знакомство съ важнѣйшими мѣрами (аршинъ, вершокъ, сажень, фунтъ, пудъ; часъ, минута, сутки; рубль, копейка) и производство простѣйшихъ измѣреній длины, вѣса и времени; ознакомленіе съ наиболѣе употребительными деньгами и почтовыми марками.

Рѣшеніе задачъ на всѣ изученные отдѣлы.

2-й годъ. Умноженіе и дѣленіе въ предѣлѣ первой сотни. Нумерація и четыре дѣйствія въ предѣлѣ первой тысячи.

Расширеніе свѣдѣній о дробяхъ (доли и дроби съ наиболѣе употребительными знаменателями въ предѣлѣ первыхъ двухъ десятковъ); преобразованія такихъ дробей и вычисленія надъ ними по соображенію.

Русскія мѣры длины, вѣса, времени, стоимости; сыпучихъ тѣлъ и жидкостей, бумаги. Названія дней недѣли и мѣсяцевъ въ году; число дней въ году и въ каждомъ мѣсяцѣ.

Выполненіе соотвѣтствующихъ курсу измѣреній. Задачи на всѣ пройденные отдѣлы.

3-й годъ. Нумерація и четыре дѣйствія надъ цѣлыми числами въ предѣлѣ милліона.

Простыя дроби съ наиболѣе употребительными знаменателями въ предѣлѣ первой сотни; преобразованія такихъ дробей (по соображенію), ихъ сложеніе и вычитаніе; умноженіе и дѣленіе на цѣлое число. Простѣйшія десятичныя дроби (десятыя, сотыя, тысячныя доли и дроби, образуемыя изъ нихъ); способъ ихъ записи, ихъ сложеніе и вычитаніе; умноженіе и дѣленіе на цѣлое число (кромѣ случаевъ безконечнаго дѣленія). Понятіе о процентѣ. Устныя преобразованія несложныхъ десятичныхъ дробей въ простыя дроби и обратно.

Важнѣйшія метрическія мѣры и связь ихъ съ русскими.

Ознакомленіе (на моделяхъ и предметахъ окружающей обстановки) съ важнѣйшими геометрическими формами (кубъ, прямоугольная призма, пирамида, шаръ, цилиндръ, конусъ; плоская и кривая поверхность, прямая и кривая линія; прямоугольникъ, квадратъ, треугольникъ, кругъ, окружность; углы; прямыя пересѣкающіяся и параллельныя, прямыя горизонтальныя и вертикальныя, прямыя перпендикулярныя и наклонныя). Измѣреніе прямоугольныхъ площадей; измѣреніе объемовъ, ограниченныхъ прямоугольными стѣнками; квадратныя и кубическія мѣры.

Упражненія въ соотвѣтствующихъ курсу измѣреніяхъ и задачи на всѣ пройденные отдѣлы.

4-й годъ. Нумерація и четыре дѣйствія надъ числами любой величины.

Завершеніе свѣдѣній о дѣйствіяхъ надъ простыми и десятичными дробями. Процентныя вычисленія.

Расширеніе свѣдѣній объ измѣреніи длинъ, поверхностей и объемовъ (измѣреніе площади параллелограмма, треугольника, трапеціи; длины окружности и площади круга, поверхностей и объемовъ прямой призмы и цилиндра, а въ случаѣ возможности — и иныхъ геометрическихъ тѣлъ). Понятіе объ измѣреніи угловъ.

Рѣшеніе задачъ на всѣ отдѣлы, въ томъ числѣ и выполненіе разсчетовъ изъ области сельскаго хозяйства, строительной практики, торговой практики, кооперативнаго дѣла и т. п.

Такой циклъ свѣдѣній и навыковъ изъ области математики я считаю необходимымъ для современной начальной школы и вполнѣ осуществимымъ при четырехлѣтнемъ курсѣ; если же какая школа располагаетъ еще и пятымъ годомъ обученія, то его планъ могъ бы быть таковъ:

Употребленіе буквъ для обозначенія чиселъ и, рѣшеніе ариѳметическихъ задачъ съ помощью простѣйшихъ уравненій.

Понятіе о степени и корнѣ въ связи съ рѣшеніемъ соотвѣтствующихъ геометрическихъ и ариѳметическихъ задачъ. Простѣйшіе способы возвышенія чиселъ въ квадратъ и извлеченія квадратнаго корня.

Пропорціональныя величины и рѣшеніе соотвѣтствующихъ задачъ упрощенными и сокращенными пріемами.

Простѣйшія свѣдѣнія о равенствѣ и подобіи фигуръ. Съемка плана. Діаграммы; наглядное изображеніе пропорціональности величинъ. Числовая и геометрическая зависимость между сторонами прямоугольника, треугольника (теорема Пиѳагора).

Простѣйшія приближенныя вычисленія.

Расширеніе—въ случаѣ надобности—свѣдѣній по курсу предыдущихъ лѣтъ (напр. изъ области ученія о дробяхъ и объ измѣреніи площадей и объемовъ); производство измѣреній и рѣшеніе задачъ на всѣ пройденные отдѣлы.

Какъ было уже выше указано, и усвоеніе программы и достиженіе возможнаго умственнаго развитія дѣтей требуютъ вполнѣ сознательнаго съ ихъ стороны воспріятія школьнаго курса математики. Каковъ же долженъ быть методъ обученія счисленію и другимъ отраслямъ начальной математики, чтобы воспринимаемыя дѣтьми свѣдѣнія и навыки усваивались ими сознательно и прочно, и чтобы цѣль обученія математикѣ, какъ матеріальная, такъ и формальная, была достигнута въ полной мѣрѣ?

Давно уже установлено, что наука и учебный предметъ—не одно и то же; что нельзя излагать напр. ариѳметику дѣтямъ въ той же формѣ, что юношамъ или взрослымъ, если только мы хотимъ добиться сколько нибудь сознательнаго усвоенія изучаемаго. Но въ чемъ именно должна выражаться связь между наукой и соотвѣтствующимъ учебнымъ предметомъ,—этотъ вопросъ возбуждаетъ нерѣдко разногласія. Нѣкоторые педагоги доходятъ даже до полнаго отрицанія этой связи; напр. на первомъ съѣздѣ учителей городскихъ училищъ, состоявшемся въ Петроградѣ въ 1909 г., профессоръ химіи Алексѣевъ утверждалъ, что въ цѣляхъ педагогическихъ можно прибѣгать къ неточнымъ и даже завѣдомо невѣрнымъ объясненіямъ, если только они помогаютъ учащимся уразумѣть суть дѣла. Подобные взгляды нужно, конечно, признать совершенно непріемлемыми: рано или поздно учащіеся узнаютъ, что некоторыя сообщенныя имъ свѣдѣнія невѣрны, и тогда невольно заподозрятъ достовѣрность всего того, чему они научились въ школѣ; авторитетъ учителя и школы будетъ тѣмъ самымъ совершенно подорванъ. Наоборотъ, необходимо установить категорически и безъ всякихъ исключенiй, что въ учебномъ предметѣ мы не можемъ ни утверждать чего либо, противорѣчащаго тому, что утверждается въ наукѣ, ни пользоваться такими способами объясненiй, которые страдаютъ логическими недочетами и потому не могутъ считаться допустимыми съ научной точки зрѣнiя.

Въ отсутствiи противорѣчiй и должно выразиться соотвѣтствiе между учебнымъ предметомъ и наукой; по существу они должны говорить одно и то же, и различiе должно быть только въ формѣ, въ которой тѣ или иныя свѣдѣнiя усваиваются учащимися и могутъ быть ими воспринимаемы. Постараюсь пояснить это различiе формъ на частномъ примѣрѣ. И взрослые, прошедшiе университетскiй курсъ математики, и дѣти, едва начавшiе свое обученiе счисленiю, знакомы съ однимъ изъ основныхъ законовъ умноженiя: «отъ перемѣны порядка сомножителей произведенiе не мѣняется». Но взрослый человѣкъ, знакомый съ теоретической ариѳметикой, не только сумѣетъ правильно формулировать этотъ законъ и пояснить его подходящими примѣрами, но сможетъ притомъ доказать помощью разсужденiй и логическихъ выводовъ, что законъ этотъ долженъ имѣть мѣсто для любыхъ чиселъ, цѣлыхъ или дробныхъ, и притомъ для любого количества сомножителей. Юноша, прошедшiй такъ называемый полный курсъ ариѳметики младшихъ классовъ средней школы, не сможетъ доказать общеобязательности этого закона для любыхъ цѣлыхъ и дробныхъ чиселъ, но съумѣетъ правильно выразить его словами и подобрать подходящіе частные примѣры, и кромѣ того, имѣетъ твердую увѣренность, почерпнутую изъ опыта, индуктивнымъ путемъ, что законъ этотъ остается справедливымъ, къ какимъ бы числамъ мы его ни примѣняли. Наконецъ ребенокъ, обученный счисленію въ границахъ первой сотни, не съумѣетъ даже выразить этого закона словами, но все же знаетъ самый законъ, такъ какъ напр. вмѣсто 3.17 всегда сосчитаетъ 17.3 и будетъ твердо увѣренъ, на основаніи опыта своихъ предыдущихъ вычисленій, что получаемый результатъ отъ этого не измѣнится. Спрашивается, кто же изъ нихъ по настоящему знаетъ перемѣстительный законъ умноженія? Очевидно, здѣсь можно примѣнять только относительную мѣрку, и придется сказать, что каждый изъ нихъ знаетъ этотъ законъ, если онъ владѣетъ имъ въ этой формѣ, которая отвѣчаетъ его вопросу и умственному развитію. Задача педагога сводится теперь къ тому, чтобы установить, какому возрасту, какая форма усвоенія и воспроизведенія познаній доступна.

Нужно сказать, что эта задача не можетъ считаться разрѣшенной въ полномъ объемѣ, такъ какъ мы не имѣемъ еще точныхъ данныхъ о ходѣ развитія мышленія у дѣтей и у юношей. Однако по изслѣдованіямъ Меймана, которыя согласуются съ данными простого наблюденія, можно думать, что только около 14-го года жизни ребенокъ становится въ состояніи сознательно пользоваться рядомъ умозаключеній, «оказывается въ состояніи видѣть связь между выполняемыми умозаключеніями и понимать ихъ». Поэтому въ отношеніи къ учащимся начальныхъ школъ вопросъ упрощается: отъ нихъ можно требовать вначалѣ только сознательнаго и твердаго пользованія пріемами вычисленій и рѣшенія задачъ, а впослѣдствіи—(къ концу обученія) также и правильнаго употребленія и объясненія смысла важнѣйшихъ математическихъ терминовъ, словеснаго выраженія извѣстныхъ имъ правилъ и болѣе или менѣе обстоятельныхъ и связныхъ отвѣтовъ на вопросы, какъ рѣшена та или иная задача и какъ выполнено опредѣленное вычисленіе или измѣреніе.

Сущность методики начальной математики и состоитъ въ уясненіи того, какъ добиваться этой цѣли, т. е. отвѣтѣ на три вопроса: какъ достигнуть правильнаго и яснаго пониманія учащимися изучаемаго матеріала? какъ обезпечить наилучшее запоминаніе изученнаго? и какъ добиться правильнаго воспроизведенія пройденнаго и примѣненія къ дѣлу? При этомъ, конечно, предполагается, что все это должно быть достигнуто безъ излишней затраты усилій со стороны учащихся и учащихъ.

Тѣ данныя психологіи и педагогіи, которыми мы можемъ въ настоящее время располагать, позволяютъ намъ дать достаточно удовлетворительный отвѣтъ на первый вопросъ. Сущность этого отвѣта знакома изъ опыта всякому сколько нибудь вдумчивому пѣдагогу. Пусть напр. учитель желаетъ довести дѣтей до сознанія, что произведеніе какого нибудь числа эа 7 можно вычислить по частямъ: сначала умножить это число на 5, потомъ на 2, и полученныя числа сложить. Съ этой цѣлью онъ задастъ имъ подходящую задачу, хотя бы такую: «Въ одной комнатѣ 5 оконъ, въ другой 2. Въ каждое изъ этихъ оконъ стекольщикъ вставилъ по 4 стекла. Сколько всего стеколъ вставилъ онъ въ эти окна»? Задача разрабатывается съ помощью вопросовъ такого рода: «Сколько стеколъ вставилъ стекольщикъ въ первой комнатѣ? 4.5=20. Сколько стеколъ вставилъ онъ во второй комнатѣ? 4.2=8. Сколько всего стеколъ вставилъ онъ? 20+8=28. А во сколько всего оконъ вставлялъ онъ стекла? 5+2=7. Значитъ, сколько разъ вставилъ онъ по 4 стекла? 7 разъ. Какъ же мы сосчитали 7 разъ по 4 стекла? Сосчитали такъ: 5 разъ по 4—20, 2 раза по 4—8, всего 28».

Проработавъ двѣ—три задачи въ такомъ же родѣ, мы добьемся того, что дѣти въ дальнѣйшихъ вычисленіяхъ будутъ уже самостоятельно примѣнять данный пріемъ—вмѣсто умноженія на 7 множить число сначала на 5, потомъ на 2, и складывать полученныя числа. Это покажетъ, что они уже овладѣли сущностью пріема, хотя бы не умѣли выразить его словами. Тогда можно поставить и обобщающій вопросъ: «Какъ взять какое нибудь число 7 разъ по частямъ? «и получить на него отвѣтъ: «Надо взять это число сначала 5 разъ, потомъ еще 2 раза и что получится—сложить».

Какъ извѣстно, этотъ методъ принято называть конкретно-индуктивнымъ, или методомъ цѣлесообразныхъ задачъ, и сущность его въ томъ, что подлежащая усвоенію истина представляется вниманію учащихся не въ отвлеченномъ видѣ, а въ выпуклой, онкретной формѣ, на понятномъ частномъ примѣрѣ, подобранномъ такъ, чтобы существенная сторона вопроса сама собой бросилась учащимся въ глаза. Такой методъ находится въ полномъ соотвѣтствіи съ данными современной психологіи; мы можемъ считать безспорнымъ, что отвлеченныя понятія не существуютъ въ нашей психикѣ отдѣльно отъ конкретныхъ представленій; если мы думаемъ напр. о березѣ вообще, мы представляемъ себѣ березу вполнѣ опредѣленнаго размѣра въ опредѣленномъ мѣстѣ, но направляемъ наше вниманіе только на существенные признаки этой березы, и по этой причинѣ представленіе объ одной опредѣленной березѣ можетъ играть для насъ роль родового образа. Какъ говоритъ по этому вопросу Гефдингъ въ своихъ «Очеркахъ психологіи», «мы имѣемъ типическія индивидуальныя представленія и общія представленія только въ томъ смыслѣ, что мы можемъ выбрать примѣры или замѣстителей цѣлой группы воспріятій и въ состояніи сосредоточить вниманіе на извѣстныхъ опредѣленныхъ частяхъ или свойствахъ, которыя (въ болѣе или менѣе измѣненномъ видѣ) можно снова встрѣтить во всѣхъ сходныхъ воспріятіяхъ... Искусство отвлеченія основывается преимущественно на способности сосредоточивать вниманіе указаннымъ образомъ». И задача учителя при установленіи новыхъ понятій, правилъ или пріемовъ вычисленій въ курсѣ математики въ томъ и состоитъ, чтобы дать учащимся такіе типичные конкретные примѣры, въ которыхъ на первый планъ выступали бы важные, существенные признаки даннаго понятія, и привлечь вниманіе учащихся именно къ этимъ признакамъ; послѣ этого, когда понадобится выразить словами данное понятіе или правило, учащіеся, подъ руководствомъ наводящихъ вопросовъ учителя, смогутъ это сдѣлать безъ труда.

Вопросъ о способахъ наилучшаго запоминанія имѣетъ большую важность въ дѣлѣ обученія счисленію: чтобы умѣть вычислять бѣгло и съ увѣренностью, мы должны твердо и безошибочно знать такъ называемыя таблицы сложенія и умноженія; кромѣ того, для той же цѣли бываетъ небезполезно помнить и нѣкоторыя соотношенія между числами первой сотни, выходящія изъ предѣловъ таблицы умноженія, а также составъ нѣкоторыхъ чиселъ первой сотни изъ сомножителей.

Въ свое время вопросъ о запоминаніи того учебнаго матеріала, который нужно удерживать въ памяти, рѣшался весьма просто: таблицу сложенія и умноженія твердили наизусть, равно какъ и правила дѣйствій, подлежащія усвоенію; издавна извѣстны и нѣкоторые пріемы, направленные къ облегченію запоминанія изучаемаго (напр, таблица умноженія «на пальцахъ», или правило о числѣ дней въ мѣсяцахъ «по кулаку»). Однако уже съ 60-хъ годовъ прошлаго столѣтія наши лучшіе методисты отодвигаютъ эти способы чисто внѣшняго усвоенія на второй план, и рекомендуютъ напр. не затверживать наизусть табличку умноженія, а путемъ постояннаго упражненія въ подходящихъ задачахъ и въ устномъ счетѣ добиваться того, чтобы результаты умноженія въ концѣ концовъ сами собой твердо запечатлѣвались въ памяти учащихся. И надо сказать, что они въ этомъ отношеніи чутьемъ уловили и предвосхитили тѣ выводы, къ которымъ приходитъ и современная экспериментальная психологія: по изслѣдованіямъ Эббинггауза оказывается, что на механическое запоминаніе безсмысленнаго матеріала тратится приблизительно въ 10 разъ болѣе труда, чѣмъ на запоминаніе такого же количества матеріала осмысленнаго и сознательно воспринимаемаго; и мы можемъ опредѣленно утверждать, что отчетливое пониманіе учебнаго матеріала есть первый и необходимый шагъ къ лучшему его запоминанію. Съ этими выводами согласуются и данныя, приводимыя Мейманомъ въ его «Лекціяхъ по экспериментальной педагогикѣ» и въ его трудѣ «Экономія и техника памяти».

Слѣдуетъ еще подчеркнуть, что весь ариѳметическій матеріалъ, подлежащій въ концѣ концовъ усвоенію на память, требуетъ длительнаго и прочнаго запоминанія (на все время обученія и даже на всю жизнь); а это достигается, какъ видно изъ указанныхъ изслѣдованій Меймана, только постояннымъ упражненіемъ втеченіе довольно долгаго времени, и при условіи, что въ школѣ поддерживается постоянный интересъ къ изучаемому предмету и хорошее самочувствіе учащихся.

Содѣйствуетъ лучшему запоминанію также и ритмичность изучаемаго матеріала. Всѣмъ намъ извѣстно, что школьники гораздо легче и скорѣе запоминаютъ суммы равныхъ слагаемыхъ или произведенія 5.5=25, 6.6=36, чѣмъ произведенія 6.9=54 или 7.8=56. Въ послѣднее время Шохоръ-Троцкій предложилъ даже цѣлую систему ритмическаго изученія таблицы умноженія и сложенія (см. его «Методику для учителей начальныхъ школъ», изд. 8-е и 9-е); но при всей правильности его основного принципа нельзя не отмѣтить, что ритмъ имѣетъ значеніе главнымъ образомъ для учащихся слухового и двигательнаго типа, а не зрительнаго; и кромѣ того, пріемы ритмическаго запоминанія, какъ и всякіе вообще мнемотехническіе пріемы, умѣстны только тогда, когда сдѣлана уже главная работа—сознательное воспріятіе изучаемаго матеріала.

Наконецъ по вопросу о воспроизведеніи и примѣненіи изученнаго можно придти къ слѣдующимъ дидактическимъ выводамъ. Слово должно быть средствомъ для выраженія мысли, а не прикрытіемъ для отсутствія мысли, какъ это нерѣдко бываетъ; поэтому мы лишь тогда можемъ требовать отъ дѣтей воспроизведенія какихъ либо познаній въ словесной формѣ, когда имѣемъ твердую увѣренность, что дѣти уже совершенно освоились съ даннымъ понятіемъ, правиломъ или пріемомъ вычисленія на рядѣ конкретныхъ примѣровъ или цѣлесообразныхъ упражненій; это необходимо по самому существу конкретно-индуктивнаго метода. Но разъ такая работа конкретнаго усвоенія какого либо вопроса уже закончена дѣтьми, то не только можно, но и должно добиваться отъ нихъ правильнаго и яснаго изложенія этого вопроса въ доступной имъ формѣ; при этомъ, вопреки часто высказываемому мнѣнію, я считаю возможнымъ и полезнымъ, чтобы дѣти къ концу курса усвоили и правильно употребляли важнѣйшіе математическіе термины, какъ напр. сумма, произведеніе, числитель, знаменатель, квадратъ, перпендикуляръ и т. д.; вѣдь стремимся же мы къ тому, чтобы дѣти научились вообще ясно и точно передавать свои мысли, а знаніе этихъ математическихъ терминовъ часто позволяетъ имъ короче и яснѣе выражаться. Иное дѣло—формальныя опредѣленія этихъ понятій; знаніе полныхъ и исчерпывающихъ опредѣленій необходимо только на той ступени школы, гдѣ на эти опредѣленія приходится ссылаться при доказательствахъ и логическихъ выводахъ; а въ курсѣ начальной школы вмѣсто формальныхъ опредѣленій достаточно въ подходящихъ случаяхъ требовать отъ учащихся объясненія смысла употребляемаго ими слова въ доступныхъ имъ выраженіяхъ на конкретномъ примѣрѣ. Напр. если учащійся на вопросъ, что значитъ умножить 18 на 3— отвѣтитъ: это все равно, что сложить 18, еще 18 и еще 18—то онъ понимаетъ смыслъ умноженія на цѣлое число не хуже, чѣмъ математикъ, который можетъ сказать: умножить одно цѣлое число на другое значитъ найти сумму столькихъ слагаемыхъ, равныхъ первому числу, сколько единицъ во второмъ числѣ

Наконецъ, необходимо замѣтить, что умѣнье вы числять не совпадаетъ еще съ умѣньемъ находить то дѣйствіе, которое нужно выполнить для рѣшенія данной задачи; это послѣднее умѣнье обезпечивается только при обстоятельномъ и реальномъ знакомствѣ съ соотношеніями величинъ, входящихъ въ данную задачу. А отсюда ясно, что наша школьная практика не можетъ ограничиваться изученіемъ счета и дѣйствій, какъ таковыхъ; мы должны дать дѣтямъ возможность при помощи счета и дѣйствій изучать окружающую ихъ жизнь съ количественной стороны, и самое изученіе счета и дѣйствій должно вестись въ постоянной связи съ тѣми числовыми и геометрическими соотношеніями, которыя встрѣчаются въ жизни дѣтей и въ окружающей ихъ обстановкѣ, и могутъ быть ими активно восприняты и усвоены.

ГЛАВА II.

Упрощенные пріемы вычисленій.

Если мы ставимъ себѣ цѣлью научить дѣтей сознательно, быстро и изящно выполнять ариѳметическія вычисленія, то мы не можемъ ограничиться тѣмъ, чтобы сообщить имъ обычные пріемы письменнаго производства дѣйствій надъ числами. Знаніе этихъ пріемовъ, конечно, необходимо, и даетъ возможность во всѣхъ случаяхъ опредѣлять искомый результатъ, но часто съ помощью очень несложныхъ соображеній можно настолько упростить вычисленія, что отпадаетъ надобность въ письменномъ производствѣ дѣйствія; напр. умножая 848 на 25, мы должны были бы по обычнымъ правиламъ умножить 848 на 5, затѣмъ на 2, причемъ подписать второе число подъ первымъ, отступивъ влѣво на одну цифру, и сложить полученные результаты; вмѣсто этого, какъ извѣстно намъ достаточно раздѣлить 848 на 4 и къ полученному числу 212 приписать справа два нуля, чтобы найти искомое произведеніе 21200. Такимъ образомъ, если бы мы стали во всѣхъ случаяхъ дѣйствій надъ числами примѣнять обычные пріемы письменнаго вычисленія.

то это повело бы насъ къ излишней потерѣ времени и труда; особенно ощутительна эта напрасная затрата труда въ тѣхъ случаяхъ, когда дѣти, обучившись пріемамъ письменнаго вычисленія, чисто механически начинаютъ примѣнять ихъ и къ небольшимъ числамъ, вмѣсто того, чтобы вычислять результатъ въ умѣ. Поэтому при обученіи счисленію слѣдовало бы держаться такого руководящаго принципа: во-первыхъ, не прибѣгать къ пріемамъ письменнаго вычисленія въ тѣхъ случаяхъ, когда учащіеся могутъ произвести его устно или, какъ говорятъ, полуписьменно (записывая только данныя числа и вычисленный въ умѣ результатъ); во-вторыхъ, отступать отъ правилъ письменнаго вычисленія во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда это отступленіе можетъ быстрѣе привести къ желаемой цѣли.

Что касается вопроса о томъ, до какого предѣла слѣдуетъ доводить умѣнье учащихся выполнять умственныя вычисленія, то, конечно, трудно было бы разрѣшить его единообразно для всѣхъ школъ и для всѣхъ учащихся, а можно указать въ этомъ отношеніи только необходимый минимумъ. Такимъ минимумомъ будетъ требованіе, чтобы учащіеся могли производить устно всѣ безъ исключенія вычисленія въ предѣлѣ первой сотни; эти вычисленія и другія, сводящіяся къ нимъ, очень часто встрѣчаются въ обыденныхъ житейскихъ разсчетахъ, и школа не выполнила бы своей задачи въ дѣлѣ обученія счисленію, если бы не научила учащихся дѣлать въ подобныхъ случаяхъ необходимый разсчетъ безъ бумаги и карандаша.

Конечно, если есть время и возможность добиться того, чтобы нѣкоторые учащіеся могли устно складывать и вычитать трехзначныя числа въ предѣлѣ тысячи, перемножать двухзначныя числа, хотя бы не превышающія 30, или выполнять соотвѣтствующія дѣленія, то такое расширеніе ихъ навыковъ въ устномъ счетѣ можетъ быть только полезнымъ, но ставить это цѣлью для всѣхъ нѣтъ возможности—что потребовало бы черезчуръ большой затраты времени и труда, и взамѣнъ того слѣдуетъ обратить вниманіе на упрощенные пріемы дѣйствій въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ.

Если мы желаемъ добиться хорошихъ результатовъ въ устномъ счетѣ, то упражненія въ немъ должны идти непрерывно; во время каждаго урока слѣдуетъ посвящать на устный счетъ минутъ 5—10. Важно обратить здѣсь вниманіе, между прочимъ, на слѣдующее обстоятельство. Если учащій будетъ вести устный счетъ только «разговорнымъ» методомъ, т.-е. будетъ всегда только н а з ы в а т ь тѣ числа, которыя нужно напр. прибавить къ полученному ранѣе результату или на которыя надо умножить полученный результатъ, то при этомъ дѣти будутъ воспринимать числа только п о с л у х у, и тѣ изъ нихъ, которыя не принадлежатъ къ слуховому типу воспріятія (а такихъ обыкновенно большинство). окажутся въ менѣе выгодномъ положеніи сравнительно съ остальными. Чтобы избѣжать такой односторонности, полезно чередовать упражненія въ устномъ счетѣ по разговорному методу съ упражненіями по зрительному методу; для этой цѣли служатъ, какъ извѣстно, таблицы, на которыхъ отпечатаны крупными цифрами ряды чиселъ, обыкновенно двузначныхъ и однозначныхъ (подобныя таблицы составлены напр. Шохоръ-Троцкимъ); такая таблица вѣшается на классной стѣнѣ, и учитель при помощи указки указываетъ на ней поочередно нужныя числа, сопровождая свои указанія словами: прибавить, умножить и т. п.; чтобы при такомъ счетѣ вовлекать въ работу всѣхъ учащихся класса, можно требовать отъ нихъ записыванія окончательнаго результата въ тетрадяхъ.

Необходимо обратить вниманіе учащихся на то, что при устныхъ вычисленіяхъ мы начинаемъ дѣйствіе съ высшихъ разрядовъ, а не съ низшихъ, какъ при письменномъ производствѣ дѣйствій. Напр. вычисляя сумму $58+26$, мы считаемъ: 50 да 20—70, 8 да 6—14; 70 да 14—84, или еще лучше 58 да 20—78, да еще 6—84; подобнымъ же образомъ разность 82—38 вычисляется такъ: 82 безъ 30—52, да еще безъ 8—44; умножая 24 на 7, вычисляемъ: $20\times7=140$ $4\times7=28$; $140+28=168$.

Изъ числа пріемовъ упрощенія вычисленій, которые должны быть примѣняемы какъ при устныхъ, такъ и при письменныхъ вычисленіяхъ, можно назвать, какъ наиболѣе важные, слѣдующіе.

При сложеніи и вычитаніи очень большую пользу можетъ оказать пріемъ закругленія слагаемыхъ или вычитаемыхъ: напр. вмѣсто 326—97 мы считаемъ такъ: $326+100=426$; $426-3=423$; вмѣсто 326—97 вычисляемъ такимъ образомъ: 326—100=226; 226+3=229. Объясненія при этомъ даются въ такомъ родѣ: когда мы отъ 326 отняли 100 вмѣсто 97, то мы отняли 3 лишнихъ единицы, поэтому найденное число 226 меньше истиннаго на 3; чтобы найти истинное число, нужно къ 226 прибавить 3.

Подобный же пріемъ закругленія чиселъ можетъ быть очень полезенъ и при умноженіи и дѣленіи. Напр. вмѣсто умноженія на 9, 19, 29 и т. д. мы множимъ данное число на 10, 20, 30 и т. д. и изъ результата отнимаемъ множимое: отыскивая напр. произведеніе 26×19, вычисляемъ такъ: 26×20=520; 520—26=494. Объясненіе—вродѣ предыдущаго: намъ нужно было 26 взять 19 разъ, а мы взяли его 20 разъ; значитъ мы взяли 26 единицъ лишній разъ, и чтобы получить вѣрное число, надо отъ полученныхъ 520 единицъ отнять 26; находимъ 494. Подобнымъ же образомъ закругляется и множимое: умножая 97 на 7, мы вычисляемъ такъ: 100×7=700; 3×7=21; 700—21=679.

При дѣленіи въ подходящихъ случаяхъ закругляемъ дѣлимое; напр. раздѣляя 594 на 6, мы дѣлимъ вмѣсто того 600, на 6 получаемъ 100; такъ какъ мы при этомъ дѣлили 6 лишнихъ единицъ, то на каждую часть придется 1 лишняя единица; значитъ истинное частное будетъ 99.

Но нерѣдко приходится закруглять и дѣлителя, напр. дѣля 160 на 38, мы разсуждаемъ такъ: 160—это 16 десятковъ, а 38—почти 4 десятка; значитъ 38 содержится въ 160 приблизительно столько же разъ, какъ 4 десятка въ 16 десяткахъ, т.-е. 4 раза. Провѣряемъ: $38 \times 4 = 152$,—это меньше 160 на 8; значитъ $160:38=4$ съ остаткомъ 8.

Даже если мы дѣлимъ на незакруглимое число, полезно бываетъ закруглять дѣлителя, чтобы подобрать приблизительную цифру частнаго. Пусть напр. дано раздѣлить 252 на 36. Разсуждаемъ такъ: 252—это 25 десятковъ съ лишнимъ, а 36 больше 3 десятковъ, но меньше 4 десятковъ; 3 десятка содержатся въ 25 десяткахъ 8 разъ, а 4 десятка—6 разъ, значитъ 36 содержится въ 252, по всей вѣроятности, отъ 6 до 8 разъ. Возьмемъ среднее число между 6 и 8, т.-е. 7, и провѣримъ его; взявъ 7 разъ 36, находимъ какъ разъ 252; значитъ $252:36=7$.

Замѣтимъ, что этотъ пріемъ закругленія постоянно примѣняется и въ письменномъ дѣленіи; напр. дѣля

$9483:29=327$	9483 на 29, мы дѣлимъ сначала
78	94 на 29 или вмѣсто этого при-
203	близительно—9 на 3; находимъ
0	цифру сотенъ частнаго—3; за-

тѣмъ дѣлимъ 78 на 29, или приблизительно—8 на 3; получаемъ цифру десятковъ 2; наконецъ дѣлимъ 203 на 29, или приблизительно 20 на 3; получаемъ 6, но эта цифра единицъ оказывается слишкомъ малой, и приходится взять 7 единицъ; такимъ образомъ получаемъ $9483:29=327$

Далѣе, при умноженіи на 11, 21, 31 и т. д. мы упрощаемъ дѣйствіе съ помощью умноженія по частямъ: множимъ данное число на 10, 20, 30 и т. д. и къ результату прибавляемъ множимое. Если дѣйствіе производится письменно, то и запись его можетъ быть упрощена, именно подъ множимымъ прямо подписываемъ его произведеніе на цифру десятковъ множителя, отступая, какъ полагается влѣво на одно мѣсто, напр.:

$$\begin{array}{r} 54.31 \\ \underline{162} \\ 1674 \end{array}$$

Пріемъ умноженія на 11 въ примѣненіи къ двузначнымъ числамъ можетъ быть еще упрощенъ. Въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ слѣдующіе примѣры умноженія на 11:

$$1)\quad \begin{array}{r} 53.11 \\ \underline{53} \\ 583 \end{array} \qquad 2)\quad \begin{array}{r} 74.11 \\ \underline{74} \\ 814 \end{array}$$

Нетрудно подмѣтить, что весь пріемъ можетъ быть сведенъ къ такому краткому правилу: чтобы умножить двузначное число на 11, надо найти сумму цифръ даннаго числа, и если она не больше 9, то вставить ее между цифрами даннаго числа; если же она больше 9, то между цифрами даннаго числа вставляется цифра единицъ этой суммы, а первая цифра нашего числа увеличивается на 1.

Общеизвѣстенъ пріемъ послѣдовательнаго умноженія: представляемъ множителя въ видѣ произведенія нѣсколькихъ чиселъ и множимъ данное множимое на одно изъ этихъ чиселъ, полученный результатъ на другое и т. д. На этомъ пріемѣ основано умноженіе на 4 съ помощью послѣдовательнаго удвоенія къ нему же сводится извѣстное правило умноженія на число, оканчивающееся нулями: чтобы умножить какое либо число на 600, мы множимъ его на 6, а полученное число еще на 100, приписывая къ нему два нуля. Можно указать и другіе случаи, въ которыхъ полезенъ данный пріемъ; напр. умножая 75 на 12, мы можемъ умножить 75 сначала на 4, а полученное число 300 еще на 3, послѣ чего находимъ 900

Пріемы умноженія на 5, 25 и 125 основаны на соединеніи умноженія съ дѣленіемъ. Чтобы умножить число на 5, множимъ его на 10 и дѣлимъ полученнсе на 2, напр. $35 \times 5 = 350 : 2 = 175$. Объясненіе таково: мы должны были 35 взять 5 разъ, а вмѣсто этого взяли его 10 разъ, значитъ полученное число 350 въ 2 раза больше истиннаго, и чтобы найти истинное число, надо раздѣлить 350 на 2; найдемъ 175. Если множится четное число, то удобнѣе измѣнить порядокъ дѣйствій; напр. умножая 36 на 5, множимъ вмѣсто того половину 36-ти, т.-е. 18, на 10, и находимъ 180; когда учащіеся знакомы уже съ дробями, то этотъ измѣненный порядокъ можно примѣнять во всѣхъ случаяхъ. Подобнымъ же образомъ, желая умножить число на 25, мы умножаемъ его на 100 и дѣлимъ полученное на 4, напр. $38 \times 25 = 3800 : 4 = 950$; если множимое дѣлится на 4, то порядокъ дѣйствій полезно измѣнить: умножая 48 на 25, мы беремъ вмѣсто того четверть даннаго числа, т е. 12, и множимъ ее на 100; выходитъ 1200. И опять же, если учащіеся знаютъ дроби, то можно примѣнять этотъ измѣненный порядокъ во всѣхъ случаяхъ. Наконецъ, желая умножить число на 125, мы можемъ умножить его на 1000 и раздѣлить полученное на 8, или, въ подходящихъ случаяхъ, найти восьмую долю даннаго числа и умножить ее на 1000.

Очень важенъ еще упрощенный прiемъ письменнаго перемноженiя двузначныхъ чиселъ—такъ называемое умноженiе «крестикомъ». Онъ состоитъ въ слѣдующемъ.

$$\begin{array}{r} 78 \\ \times 54 \\ \hline 4212 \end{array}$$

Пусть напр. намъ нужно умножить 78 на 54. Подписываемъ данныя числа другъ подъ другомъ и вычисляемъ единицы произведенiя; получаемъ $8 \times 4 = 32$, пишемъ 2 подъ единицами, а 3 (десятка) запоминаемъ, и вычисляемъ теперь сразу десятки произведенiя: они получатся отъ умноженiя 7 десятковъ множимаго на 4 единицы множителя и 5 дес. множителя на 8 ед. множимаго; вычисляемъ: 7 на 4—28, 5 на 8—40; 40 да 28—68, да еще 3 дес. въ умѣ, всего 71 десятокъ; пишемъ 1 подъ десятками, а 7 сотенъ запоминаемъ; вычисляемъ теперь сотни произведенiя—онѣ получатся отъ перемноженiя десятковъ сомножителей: 7 на 5—35, да еще 7 сотенъ въ умѣ, всего 42 сотни. Такимъ образомъ получаемъ произведенiе 4212.

При должномъ навыкѣ этотъ прiемъ значительно упрощаетъ перемноженiе двузначныхъ чиселъ. Можно примѣнить его и къ трехзначнымъ числамъ, только вычисленiе гораздо сложнѣе.

Умножимъ напр. 759 на 327.

$$\begin{array}{r} 759 \\ \times 327 \\ \hline 248193 \end{array}$$

Вычисляемъ единицы произведенія: 9×7=63; пишемъ 3 подъ единицами, а 6 дес. запоминаемъ. Десятки произведенія получатся отъ перемноженія десятковъ одного сомн жителя на единицы другого: 5×7=35, 2×9=18; 35 да 18—53, да еще 6 дес. въ умѣ, всего 59 десятковъ; пишемъ подъ десятками 9, а 5 сотенъ запоминаемъ.

Сотни произведенія получатся отъ умноженія сотенъ на единицы и десятковъ на десятки: 7×7=49, 3×9=27, 5×2=10; 49 да 27 да 10—86 сотенъ, да еще 5—91 сотня; 1 пишемъ подъ сотнями, а 9 тысячъ запоминаемъ

Тысячи произведенія получатся отъ умноженія сотенъ на десятки: 7×2=14, 3×5=15; 14 да 15—29 да еще 9 въ умѣ—всего 38 тысячъ; 8 пишемъ, а 3 (дес. тыс.) запоминаемъ.

Наконецъ десятки тысячъ получатся отъ перемноженія сотенъ: 7×3=21, да еще 3 въ умѣ—24 десятка тысячъ; вписываемъ ихъ на свои мѣста, и находимъ произведенія 248193.

При обычномъ перемноженіи многозначныхъ чиселъ удобнѣе записывать множителя рядомъ съ множимымъ, а не подъ нимъ; а если при этомъ одна изъ цифръ множителя есть 1, то запись можетъ быть еще упрощена, какъ видно изъ слѣдующихъ примѣровъ.

1) $\begin{array}{r} 324.157 \\ \hline +1620 \\ 2268 \\ \hline 50868 \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} 276.561 \\ \hline +1656 \\ 1380 \\ \hline 154836 \end{array}$ 3) $\begin{array}{r} 283.512 \\ \hline +\ 566 \\ 1415 \\ \hline 144896 \end{array}$

Въ первомъ примѣрѣ первая цифра множителя есть 1; поэтому начинаемъ умноженіе съ высшихъ разрядовъ множителя: множимъ 324 на 1 сотню, получаемъ 324 сотни и вмѣсто того, чтобы подписывать это частичное произведеніе подъ множимымъ, принимаемъ запись множимаго (324) за это частичное произведеніе помня, что оно будетъ обозначать теперь 324 сотни. Дальше множимъ 324 на 5 десятковъ и на 7 единицъ и полученныя произведенія—1620 десятковъ и 2268 единицъ—подписываемъ подъ первой записью такъ, чтобы единицы одинаковыхъ разрядовъ стояли другъ подъ другомъ; сложивъ все, получаемъ 50868.

Во второмъ примѣрѣ послѣдняя цифра множителя есть 1; начинаемъ умноженіе съ низшихъ разрядовъ, т. е. съ единицъ, и опять принимаемъ запись множимаго (276) за первое частичное произведеніе 276 на 1. Дальше продолжаемъ вычисленіе, какъ обычно, пока не найдемъ произведеніе 154836.

Наконецъ въ третьемъ примѣрѣ цифра 1 стоитъ посреди цифръ множителя (и обозначаетъ десятки); множимъ сначала 283 на 1 десятокъ и считаемъ, что запись множимаго (283) будетъ обозначать нами полученные 283 десятка; потомъ множимъ 283 на 2 единицы и на 5 сотенъ и подписываемъ эти частичныя произведенія такъ, чтобы цифры одинаковыхъ разрядовъ стояли въ одномъ столбцѣ; послѣ сложенія получаемъ окончательно 144896.

При дѣленіи можетъ оказать пользу пріемъ опстепеннаго дѣленія: именно, если дѣлитель представляетъ произведеніе двухъ или нѣсколькихъ чиселъ, то мы можемъ дѣлить данное дѣлимое сперва на одно изъ этихъ чиселъ, потомъ полученный результатъ на другое и т. д. На этомъ соображеніи основано напр. дѣленіе на 4 съ помощью послѣдовательнаго дѣленія пополамъ, а также дѣленіе на число, оканчивающееся нулями: чтобы раздѣлить напр. 2400 на 600, мы дѣлимъ сперва 2400 на 100 (отбрасывая нули), а затѣмъ полученное число 24 еще на 6, и находимъ 4 (впрочемъ, какъ извѣстно, отбрасываніе одинаковаго числа нулей въ дѣлимомъ и дѣлителѣ можно объяснить и иначе, исходя изъ того положенія, что частное не мѣняется отъ уменьшенія дѣлимаго и дѣлителя въ одинаковое число разъ). Можно подыскать и другіе случаи, когда полезно послѣдовательное дѣленіе: напр. вмѣсто того, чтобы дѣлить 516 на 12, удобно раздѣлить 516 на 3 и полученное частное 172 уже на 4; найдемъ 43.

Чтобы раздѣлить число на 5, 25 или 125, пригоденъ пріемъ, обратный тому, который примѣнялся при умноженіи на эти числа; именно, чтобы раздѣлить на 5, мы множимъ данное число на 2 и дѣлимъ полученное на 10, напр. 2385:5=4770:10=477; чтобы раздѣлить число на 25, множимъ это число на 4, а полученное дѣлимъ на 100, напр. 3475:25=13900:100=139, и т. п. (объяснять этотъ пріемъ проще всего, опираясь на неизмѣняемость частнаго при увеличеніи дѣлимаго и дѣлителя въ одинаковое число разъ).

Теперь я остановлюсь еще на двухъ дѣйствіяхъ, которыя обычно не проходятся въ начальномъ курсѣ ариѳметики, но часто попадаются въ простѣйшихъ задачахъ геометрическаго содержанія—при вычисленіи площади квадрата и стороны квадрата или прямоугольнаго треугольника. Это возвышеніе чиселъ въ квадратъ и извлеченіе изъ нихъ кв дратнаго корня (въ предложенной выше примѣрной программѣ эти вопросы отнесены къ пятому году обученія, гдѣ таковой имѣется; но если есть время и возможность, то небезполезно коснуться этихъ вопросовъ и въ четырехлѣтней школѣ въ послѣдній годъ обученія).

Возвысить число въ квадратъ—значитъ, какъ извѣстно, умножить это число на самого себя, и это умноженіе можетъ выполняться и непосредственно; но въ немъ возможны, какъ увидимъ, значительныя упрощенія.

Пусть напр. намъ нужно возвысить въ квадратъ число 57. Если мы будемъ умножать 57 на 57 «крестикомъ», то вычисленіе пойдетъ такъ:

$$\begin{array}{r} 57 \\ \times 57 \\ \hline 3249 \end{array}$$

Перемножаемъ сперва единицы: $7 \times 7 = 49$; 9 пишемъ, а 4 десятка замѣчаемъ.

Потомъ вычисляемъ десятки; для этого придется перемножить 5×7 и еще 5×7 и полученное сложить; будетъ 70, да еще 4 въ умѣ, всего 74 десятка; пишемъ 4, а 7 сотенъ замѣчаемъ.

Наконецъ сотни получатся отъ перемноженія десятковъ: $5 \times 5 = 25$, да еще 7 въ умѣ, всего 32 сотни. Пишемъ это на своемъ мѣстѣ и получаемъ окончательно 3249.

Нетрудно замѣтить слѣдующее правило: мы беремъ сначала квадратъ единицъ даннаго числа (7×7), и получаемъ единицы; потомъ перемножаемъ цифры даннаго числа между собой (5×7) и полученное число удваиваемъ—это будутъ десятки результата; наконецъ беремъ квадратъ цифры десятковъ даннаго числа (5×5)—и это будутъ сотни результата. По этому правилу очень просто вычисляется квадратъ всякаго двузначнаго числа, напр. 68^2.

$$\frac{68^2}{4624}$$

Вычисляемъ такъ: $8^2=64$, 4 пишемъ, 6 въ умѣ; дальше $6\times8=48$, да вдвое—96, да еще 6 въ умѣ—102; это будутъ десятки; пишемъ 2 подъ десятками, а 10 (сотенъ) запоминаемъ; наконецъ $6^2=36$, да еще 10 въ умѣ—46; это сотни, пишемъ ихъ на своемъ мѣстѣ и имѣемъ 4624.

Можно подобнымъ же способомъ возвысить въ квадратъ и трехзначное число, если разсматривать его, какъ состоящее изъ десятковъ и единицъ, напр.:

$$\frac{138^2}{19044}$$

Вычисляемъ единицы: $8^2=64$; 4 пишемъ, 6 въ умѣ; затѣмъ десятки: $13\times8=104$, да вдвое—208, да 6 въ умѣ—214; 4 пишемъ, 21 запоминаемъ; наконецъ сотни: $13^2=13\times13=169$, да 21 въ умѣ—190; всего 19044.

Еще проще возвышаются въ квадратъ числа, у которыхъ цифра единицъ есть 5. Пусть напр. намъ

$$\frac{85^2}{7225}$$

нужно возвысить въ квадратъ число 85; начнемъ вычисленіе съ высшихъ разрядовъ: мы должны тогда перемножить 8 десятковъ на 8 десятковъ, потомъ два раза 8 десятковъ на 5 единицъ, или вмѣсто этого 8 десятковъ на 1 десятокъ всего такимъ образомъ намъ придется умножить 8 десятковъ на 9 десятковъ—получимъ 72 сотни; остается еще перемножить единицы: $5 \times 5 = 25$, и получаемъ окончательно 7225. Нетрудно замѣтить, какъ сразу получить это число: надо взять число десятковъ (8), умножить его на слѣдующее число (9) и къ полученному произведенію (72) приписать 25. Замѣтивъ это правило, мы можемъ въ другихъ подобныхъ случаяхъ писать результатъ сразу; такъ напр. $45^2 = 2025$, $105^2 = 11025$ и т. д.

Подобное же правило примѣнимо и къ возвышенію въ квадратъ цѣлаго числа съ дробью $^1/_2$; напр. возвышая $7^1/_2$ въ квадратъ, мы множимъ 7 на слѣдующее число 8 и къ произведенію 56 прибавляемъ $^1/_4$; получаемъ $56^1/_4$. Объясняется этотъ пріемъ такъ же: при умноженіи $7^1/_2$ на $7^1/_2$ мы должны умножить 7×7, потомъ два раза 7 на $^1/_2$, или вмѣсто того 7×1; вмѣстѣ получается 7×8; остается еще прибавить $^1/_2 \times ^1/_2$, т.-е. $^1/_4$.

Для извлеченія квадратнаго корня существуютъ общіе пріемы, излагаемые въ алгебрѣ; объясненіе ихъ довольно сложно и для учащихся начальной школы мало доступно. Но можно указать простой и вполнѣ пригодный пріемъ для извлеченія квадратныхъ корней съ помощью дѣленія.

Пусть напр. намъ нужно извлечь квадратный корень изъ 4489. Это значитъ—найти число, которое при умноженіи на самого себя давало бы 4489. Очевидно искомое число должно быть двузначнымъ (т.-е. состоять изъ десятковъ и единицъ), такъ какъ только двузначное число при умноженіи на самого себя можетъ дать четырехзначное число 4489. Постараемся сообразить, сколько въ искомомъ корнѣ десятковъ. Десятки корня при умноженіи на самихъ себя даютъ сотни, а сотенъ въ нашемъ числѣ 44; значитъ мы должны подобрать число, которое при умноженіи на самого себя давало бы 44, или около этого. Такое число есть 6 (потому что $6^2=36$, а $7^2=49$); значитъ въ нашемъ корнѣ 6 десятковъ и еще нѣсколько единицъ. Такимъ образомъ нашъ корень содержится между 60 и 70; посмотримъ, не будетъ ли онъ равенъ среднему между ними числу, т.-е. 65. Для провѣрки раздѣлимъ 4489 на 65; если наше предположеніе вѣрно, то мы должны получить въ частномъ тоже 65.

$$\begin{array}{l} 4489:65=69 \text{ (ост. 4)} \\ \underline{-390} \\ 589 \\ \underline{-585} \\ 8 \end{array}$$

Мы получили въ частномъ 69 и въ остаткѣ 4; значитъ 65 не будетъ искомымъ корнемъ; но мы можемъ показать, что корень долженъ лежать между 65 и 69. Въ самомъ дѣлѣ, дѣлимое (4489) равно дѣлителю (65), умноженному на частное (69), плюсъ остатокъ (4), или:

$$4489=65.\ 69+4$$

Если бы искомый корень былъ менѣе 65, то будучи умноженъ на самого себя, онъ далъ бы менѣе, чѣмъ 65.65, а это менѣе 4489; если же предположимъ, что искомый корень болѣе 69, то квадратъ его долженъ быть болѣе, чѣмъ 69.69, т.-е. болѣе 4489. Значитъ искомый корень содержится между 65 и 69; посмотримъ опять, не будетъ ли онъ равенъ среднему между ними числу, т.-е. 67. Для провѣрки раздѣлимъ 4489 на 67; получаемъ въ частномъ ровно 67; значитъ 67 есть такое число, которое при умноженіи на самого себя даетъ 4489, т.-е. оно и есть искомый корень.

$$\begin{array}{r} 4489:67=67 \\ -402 \\ \hline 469 \\ -469 \\ \hline 0 \end{array}$$

Подобнымъ же образомъ можно разсуждать въ другихъ случаяхъ; и данный пріемъ пригоденъ для извлеченія корня не только точнаго, но и приближеннаго.

Для упрощенія вычисленій весьма полезно знать еще и такое соотношеніе: если сумму двухъ чиселъ умножить на ихъ разность, то получается разность квадратовъ этихъ чиселъ. Это свойство доказывается въ алгебрѣ весьма просто съ помощью буквенной формулы; но можно выяснить его учащимся и не прибѣгая къ буквамъ. Пусть напр. намъ нужно умножить 38 на 42. Мы выполняемъ это такъ: множимъ 38 сначала на 40, потомъ на 2, и полученныя числа складываемъ. Но чтобы умножить 38 на 40, мы можемъ опять же умножить сначала 40.40, потомъ 2.40, и полученныя числа вычесть; чтобы умножить 38 на 2, мы также умножимъ 40.2 и 2.2 и полученныя числа вычтемъ; потомъ результатъ второго вычисленія нужно будетъ прибавить къ первому. Запишемъ теперь по порядку всѣ вычисленія:

$$(40.40-2.40)+(40.2-2.2)$$

или: $40.40-2.40+40.2-2.2$

Теперь видно, что среднія два дѣйствія уничтожають другъ друга, и полученный результатъ таковъ:

$$40.40-2.2$$

Итакъ видимъ, что разность 40—2, будучи умножена на сумму 40+2, даетъ въ результатѣ разность квадратовъ тѣхъ же чиселъ: 40.40—2.2, и вычисляемъ: $38.42=40^2-2^2=1600-4=1596$. Проведя такое разсужденіе на нѣсколькихъ примѣрахъ, учащіеся вскорѣ смогутъ уже прямо вычислять такія произведенія: $45\times55=(50-5).(50+5)=50^2-5^2=2500-25=2475$, $96.104=(100-4).(100+4)=100^2-4^2=10000-16=9984$ и т. д.

Наоборотъ, иногда бываетъ удобно замѣнить вычисленіе разности квадратовъ двухъ чиселъ произведеніемъ ихъ суммы на разность; это бываетъ тогда, когда данныя числа мало отличаются другъ отъ друга, напр.

$$129^2-126^2=(129+126).(129-126)=255.3=765$$

Если берется разность квадратовъ двухъ послѣдовательныхъ чиселъ, то легко видѣть, что результатъ равенъ суммѣ данныхъ чиселъ, напр.

$$61^2-60^2=(61+60).(61-60)=61+60=121.$$

Въ заключеніе укажу еще на упрощенные способы вычисленія нѣкоторыхъ замѣчательныхъ суммъ, встрѣчающихся въ практическихъ задачахъ, и обнаруживающихъ интересныя свойства чиселъ.

Пусть напр дана задача: «Журавли летаютъ обыкновенно клиномъ; впереди летитъ одинъ журавль, за нимъ два, далѣе три и т. д. Сколько журавлей въ стаѣ, если они летятъ такимъ образомъ въ 10 рядовъ»?

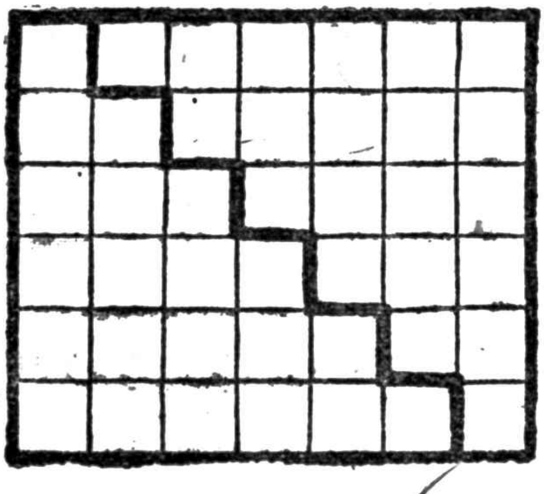
Въ этой задачѣ приходится найти сумму чиселъ натуральнаго ряда: $1+2+3+\ldots+10$. Чтобы выяснить упрощенный способъ вычисленія этой суммы, напишемъ рядъ данныхъ чиселъ отъ 1 до 10, а подъ нимъ рядъ тѣхъ же чиселъ, но въ обратномъ порядкѣ:

1,2,3,4,5,6,7,8,9,10
10,9,8,7,6,5,4,3,2, 1.

Если мы теперь сложимъ каждыя два числа, стоящія другъ подъ другомъ, то будемъ каждый разъ получать 11. Всѣхъ суммъ, такимъ образомъ найденныхъ, будетъ 10; слѣд. сумма всѣхъ чиселъ, написанныхъ въ обѣихъ строкахъ, равна 110; а сумма чиселъ одной строки будетъ вдвое менѣе, т.-е. 55.

Легко замѣтить правило: чтобы сложить числа натуральнаго ряда, нужно взять число слагаемыхъ (10), умножить его на слѣдующее число (11), и полученное раздѣлить пополамъ.

Правило это можно представить наглядно. Составимъ фигуру изъ квадратиковъ вродѣ изображенной на черт. 1 съ лѣвой стороны: въ верхнемъ ея ряду одинъ квадратикъ, въ слѣдующемъ два, затѣмъ три и т. д. Потомъ приставимъ къ ней рядомъ точно



Черт. 1.

такую же фигуру изъ квадратиковъ, повернувъ ее нижнимъ концомъ наверхъ; мы получимъ тогда прямоугольникъ. Ясно, что число квадратиковъ въ каждой изъ нашихъ фигуръ есть сумма чиселъ натуральнаго ряда: $1+2+3+\ldots$ и т. д.; прямоугольникъ же содержитъ столько полосъ, сколько мы взяли слагаемыхъ въ натуральномъ ряду, а квадратиковъ въ каждой полосѣ—однимъ больше. Значитъ мы найдемъ число квадратиковъ всего прямоугольника, если умножимъ число всѣхъ слагаемыхъ на слѣдующее за нимъ число; а въ нашей фигурѣ ихъ помѣщается вдвое меньше. На нашемъ чертежѣ фигура изображаетъ сумму 6 чиселъ натуральнаго ряда, и число квадратиковъ въ ней $\frac{6.7}{2}$, т.-е. 21.

Зная это, мы легко сможемъ опредѣлить и сумму ряда четныхъ чиселъ:

2,4,6,8,10,...

Такъ какъ каждое число этого ряда вдвое больше соотвѣтствующаго числа натуральнаго ряда

1,2,3,4,5,...

то и сумма чиселъ четнаго ряда должна быть вдвое болѣе суммы чиселъ натуральнаго ряда, т.-е. получается отъ умноженія числа слагаемыхъ на слѣдующее за нимъ число. Напр. сумма первыхъ 20 четныхъ чиселъ—$20.21=420$.

Нетрудно, конечно, опредѣлить и сумму такого ряда чиселъ:

3,6,9,12,15,...

Всѣ числа этого ряда втрое болѣе соотвѣтствующихъ чиселъ натуральнаго ряда; поэтому намъ достаточно будетъ найти сумму соотвѣтственнаго числа членовъ натуральнаго ряда и увеличить ее втрое.

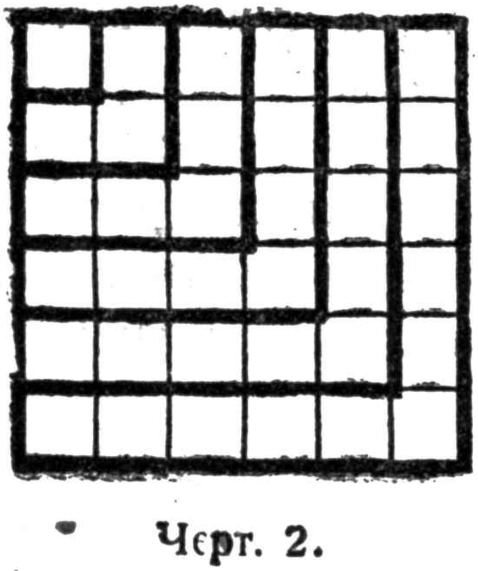
Очень интересна сумма ряда нечетныхъ чиселъ:

$$1, 3, 5, 7, 9, \ldots$$

Если мы будемъ складывать подрядъ написанныя числа, то найдемъ

$$
\begin{aligned}
1+3 &= 4=2^2,\\
1+3+5 &= 9=3^2,\\
1+3+5+7 &= 16=4^2,\\
1+3+5+7+9 &= 25=5^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

т.-е. сумма первыхъ двухъ нечетныхъ чиселъ $=2^2$, сумма трехъ нечетныхъ чиселъ $=3^2$, и т. д.; вообще сумма любого числа первыхъ нечетныхъ чиселъ равна квадрату ихъ числа.



Черт. 2.

Это замѣчательное свойство ряда нечетныхъ чиселъ можно сдѣлать нагляднымъ при помощи фигуры, изображенной на черт. 2. Какъ видно, она составлена такъ: берется одинъ квадратикъ, къ нему приставляется фигура изъ трехъ квадратиковъ, затѣмъ фигура изъ пяти квадратиковъ и т. д.; а очевидно, что всякій разъ изъ этихъ фигуръ образуется квадратъ, содержащій столько клѣтокъ, сколько получится отъ возведенія въ квадратъ числа всѣхъ слагаемыхъ.

Нетрудно также найти сумму любого числа членовъ ариѳметической прогрессіи, т.-е. такого ряда чиселъ, въ которомъ каждое слѣдующее получается изъ предыдущаго прибавленіемъ (или отниманіемъ) одного и того же числа.

Возьмемъ напр. слѣдующій рядъ изъ семи чиселъ:

2,5,8,11,14,17,20

Подпишемъ подъ нимъ тѣ же числа въ обратномъ порядкѣ:

20,17,14,11,8,5,2

Если теперь сложимъ каждыя два числа, стоящія другъ подъ другомъ, то получимъ каждый разъ 22, т.-е. сумму крайнихъ чиселъ (20 и 2); и эта сумма будетъ повторяться столько разъ, сколько всѣхъ чиселъ въ каждой строкѣ, т.-е. 7 разъ. Значитъ сумма всѣхъ чиселъ обѣихъ строкъ—22.7, а сумма всѣхъ чиселъ данной намъ строки вдвое меньше, т.-е. равна 22.7 или 77. Легко замѣтить и общее правило: сумма чиселъ, возрастающихъ или убывающихъ на одинаковое число единицъ (сумма членовъ ариѳметической прогрессіи) равна половинѣ суммы крайнихъ чиселъ, умноженной на число ихъ.

Приведу теперь пару задачъ изъ числа тѣхъ, въ которыхъ приходится складывать числа по указаннымъ здѣсь правиламъ.

1) Рабочіе нанялись рыть колодецъ на такихъ условіяхъ, чтобы за первый аршинъ глубины имъ

было заплачено 40 коп. а за каждый слѣдующій на 25 коп. дороже, чѣмъ за предыдущій. Сколько нужно имъ заплатить, если колодецъ будетъ имѣть 9 арш. глубины?

Опредѣляемъ сперва сколько они получатъ за послѣдній аршинъ; для этого нужно къ 40 коп. прибавить 8 разъ по 25 коп., т.-е. 2 рубля; получимъ 2 р. 40 коп. Теперь искомая сумма вычисляется такъ складываемъ крайнія числа: 40 к. и 2 р. 40 к.; ихъ сумму (2 р. 80 к) дѣлимъ пополамъ, и найденно: число 1 р. 40 к. множимъ на число аршинъ (9); имѣемъ 12 р. 60 коп.

2) Если камень падаетъ на землю, то онъ въ первую секунду пролегаетъ 16,1 фута, а въ каждую слѣдующую на 32,2 фута больше, чѣмъ въ предыдущую. Съ какой высоты нужно бросить камень, чтобы онъ упалъ на землю черезъ 10 секундъ?

Напишемъ рядъ чиселъ, выражающихъ, сколько футовъ пролетитъ камень за первую, вторую, третью и т. д. секунду своего паденія:

16,1;48,3;80,5;112,7;...

Видимъ, что эти числа получаются отъ умноженія чиселъ нечетнаго ряда: 1, 3, 5, 7... на 16, 1; слѣд. искомая высота будетъ равна суммѣ 10 чиселъ нечетнаго ряда, умноженной на 16, 1; а такъ какъ сумма 10 чиселъ нечетнаго ряда равна 10 , или 100, то искомая высота=16, 1. 100, или 1610 футамъ.

ГЛАВА III.

Какъ облегчить учащимся рѣшеніе задачъ.

Педагогическая практика на каждомъ шагу даетъ намъ почувствовать, что умѣнье совершать дѣйствія надъ числами отнюдь не обезпечиваетъ учащимся навыка въ рѣшеніи задачъ: ученикъ можетъ хорошо знать, какъ выполнить то или иное дѣйствіе, и можетъ затрудняться въ томъ, какое именно дѣйствіе онъ долженъ совершить въ задачѣ, такъ какъ для него можетъ быть невполнѣ ясна зависимость между величинами, входящими въ задачу. Всѣмъ извѣстно, какъ часто дѣти пытаются дѣлать сложеніе въ тѣхъ случаяхъ, когда въ задачѣ сказано: въ 3 раза больше, и умноженіе въ тѣхъ случаяхъ, когда дано: на 3 больше; изъ своей практики я знаю случаи, когда дѣти, желая узнать стоимость купленнаго товара, складывали стоимость одного фунта съ числомъ фунтовъ всего товара. Для того, чтобы дѣти могли справиться съ задачей, необходимо прежде всего, чтобы они совершенно ясно представляли себѣ соотношенія между тѣми величинами, которыхъ идетъ рѣчь; поэтому въ началѣ обученія слѣдуетъ задавать только такія задачи, данныя которыхъ взяты изъ окружающей дѣтей обстановки и входятъ въ кругъ ихъ интересовъ. Напр. врядъ ли цѣлесообразно задавать въ сельской школѣ такія задачи: «Сестра пришила 1 арш. 4 вершк. резинки къ своей шляпѣ и къ шляпѣ матери. Сколько вершковъ резинки ушло на шляпу матери, если къ своей шляпѣ она пришила 9 вершковъ»?—«Изъ 2 ф. 4 лотовъ гаруса вышло 4 пары гамашъ. Сколько гаруса пойдетъ на 5 паръ такихъ гамашъ»? Съ другой стороны городскія дѣти съ трудомъ разберутся въ задачахъ такого рода: «крестьянинъ согнулъ 3 вязовыхъ дуги и 2 ветловыхъ. Сколько всего дугъ согнулъ онъ»?— «На лугу было сметано нѣсколько стоговъ сѣна; когда 6 стоговъ увезли, то на лугу осталось 2 стога. Сколько стоговъ сѣна было сметано на лугу»? — Въ виду этого, нельзя не согласиться съ мыслью, что подборъ задачъ для дѣтей, обучающихся въ городскихъ школахъ, долженъ быть отличенъ отъ того, какой предлагается въ сельскихъ школахъ; въ послѣдніе годы появились даже особые задачники для городскихъ школъ, и эту попытку слѣдуетъ признать вполнѣ цѣлесообразной.

Но съ другой стороны, нельзя ограничиваться при обученіи только тѣми задачами, данныя которыхъ знакомы дѣтямъ по ихъ дошкольнымъ и домашнимъ наблюденіямъ; это слишкомъ съуживало бы дѣтскій кругозоръ. Поэтому выходъ только въ одномъ: если есть основаніе предполагать, что у дѣтей нѣтъ еще должныхъ представленій о величинахъ, входящихъ въ данную задачу, то прежде, чѣмъ приступить къ ея рѣшенію, нужно постараться создать эти необходимыя представленія въ дѣтскомъ умѣ.

Пусть напр. рѣшается задача: «Разстояніе между двумя деревнями 35 верстъ. Изъ первой деревни вышелъ во вторую пѣшеходъ; въ каждый часъ онъ проходитъ 4 версты. Въ это самое время навстрѣчу ему изъ второй деревни вышелъ другой пѣшеходъ, который проходитъ въ каждый часъ по 3 версты. Черезъ сколько часовъ они встрѣтятся»?—Какъ извѣстно, при рѣшеніи подобныхъ задачъ дѣти затрудняются главнымъ образомъ тѣмъ обстоятельствомъ, что не могутъ себѣ ясно представить соотношенія между временемъ движенія и разстояніемъ, раздѣляющимъ пѣшеходовъ; даже если задать предварительную задачу съ вопросомъ, насколько уменьшается въ каждый часъ разстояніе между пѣшеходами, то, это еще не всегда наводитъ дѣтей на мысль, что до встрѣчи пройдетъ столько часовъ, сколько разъ сумма ихъ часовыхъ скоростей (7 верстъ) содержится во всемъ разстояніи.

Поэтому для выясненія сути дѣла цѣлесообразнѣе всего сдѣлаетъ такъ, чтобы учащіеся могли собственными глазами у в и д ѣ т ь уменьшеніе разстоянія со временемъ, подобное тому, которое имѣетъ мѣсто въ данной задачѣ. Пусть напр. учитель вызоветъ одного ученика и велитъ ему отмѣрить вдоль стѣны классной комнаты разстояніе въ 35 какихъ нибудь произвольныхъ мѣръ, напр. четвертей аршина (это можно отмѣрить прямо рукой, такъ какъ разстояніе между концами вытянутыхъ пальцевъ руки—у взрослыхъ перваго и второго, а у дѣтей—перваго и пятаго—приблизительно равно четверти аршина); начало и конецъ разстоянія должны быть отмѣчены какими нибудь замѣтными мѣтками. Затѣмъ учитель вызываетъ еще двухъ учениковъ и велитъ имъ помѣститься по концамъ отмѣреннаго разстоянія, и изображать пѣшеходовъ, о которыхъ идетъ рѣчь въ задачѣ; отмѣряющему же ученику велитъ отмѣтить разстояніе въ 4 «четверти», считая отъ перваго изъ «пѣшеходовъ» и 3 «четверти», считая отъ второго; послѣ этого, по данному учителемъ знаку ученики—«пѣшеходы» передвигаются навстрѣчу другъ другу на указанныя разстоянія (слѣдуетъ, конечно, чтобы они одновременно двинулись другъ другу навстрѣчу и одновременно остановились въ указанныхъ имъ мѣстахъ). Теперь можно задать классу вопросы: «Сколько верстъ было между пѣшеходами въ началѣ, при выходѣ»?—«А на сколько уменьшилось это разстояніе за одинъ часъ»?—«Сколько же верстъ будетъ между ними черезъ одинъ часъ»? «Затѣмъ отмѣряющій ученикъ еще разъ отсчитываетъ 4 «четверти» впередъ отъ перваго «пѣшехода» и 3 «четверти» отъ второго а «пѣшеходы» по знаку учителя снова передвигаются на указанныя имъ мѣста, выполняя свои передвиженія одновременно, какъ и въ первый разъ. Классу снова задаются вопросы: «Сколько верстъ было между пѣшеходами черезъ одинъ часъ»?—«Насколько уменьшилось это разстояніе за второй часъ»?—«Сколько же верстъ останется между ними черезъ два часа»? Подобное передвиженіе можно повторять и дальше; но какъ только ученики замѣтили, что разстояніе между пѣшеходами уменьшается въ каждый часъ на 7 верстъ, они смогутъ сообразить, сколько разъ можно отнимать по 7 верстъ отъ всего разстоянія, и слѣдовательно, сколько часовъ понадобится пѣше ходамъ идти до встрѣчи.

Небезполезно, если учащіеся будутъ одновременно зарисовывать ходъ рѣшенія въ своихъ тетрадяхъ. При этомъ нѣтъ надобности, чтобы рисунокъ былъ непремѣнно полнымъ; онъ можетъ быть и схематичнымъ—достаточно напр. изобразить дорогу прямой линіей, пѣшехода—вертикальной чертой и т. д.

При такомъ способѣ разработки вопроса учащіеся пріобрѣтутъ необходимыя свѣдѣнія о томъ процессѣ измѣненія, который описывается въ задачѣ, и притомъ воспримутъ ихъ на основаніи личнаго опыта, а не только со словъ учителя. Все это обезпечиваетъ наибольшую возможность сознательнаго усвоенія дѣла, и можно тогда разсчитывать, что дальнѣйшія задачи подобнаго рода будутъ разрѣшаться вполнѣ успѣшно.

Подобнымъ образомъ, если нужно рѣшить задачу: «Палка длиной 4 арш. отбрасываетъ тѣнь въ 6 арш.; въ это самое время колокольня отбрасываетъ тѣнь въ 13 саженъ; найти высоту колокольни»—то прежде всего необходимо удостовѣриться, знаютъ ли учащіеся, что тѣнь отъ колокольни во столько же разъ длиннѣе (или короче) колокольни, во сколько разъ тѣнь отъ палки длиннѣе (или короче) самой палки.

Если они, какъ обыкновенно бываетъ, не знакомы съ этимъ закономъ, то нужно въ подходящій солнечный день на самомъ дѣлѣ измѣрить съ ними длину нѣсколькихъ вертикальныхъ предметовъ и ихъ тѣней, и заставить ихъ на опытѣ убѣдиться въ указанной пропорціональности. Точно также и такія зависимости, какъ пропорціональность между количествомъ воды, песку или иного вещества и вѣсомъ этихъ веществъ, между количествомъ товара и стоимостью товара—могутъ быть усвоены и провѣрены дѣтьми при помощи подобныхъ же опытовъ, къ которымъ по возможности должны привлекаться всѣ учащіеся класса.

Однимъ изъ средствъ сдѣлать обученіе счисленію болѣе нагляднымъ и болѣе интереснымъ для дѣтей является также примѣненіе картинокъ для счета, рѣшенія и составленія задачъ. Этотъ пріемъ сдѣлался въ послѣдніе годы особенно моднымъ; появилось немало иллюстрированныхъ задачниковъ для начальнаго обученія счисленію, а въ нѣкоторыхъ изъ нихъ первыя страницы состоятъ сплошь изъ однѣхъ картинокъ да численныхъ примѣровъ на различныя дѣйствія. Небезполезно поэтому поставить себѣ вопросъ, какую роль играютъ иллюстраціи при обученіи счисленію, и въ какой мѣрѣ онѣ должны быть въ немъ примѣняемы.

Прежде всего замѣчу, что при помощи картинки мы можемъ получить понятіе только о той или иной группѣ предметовъ, существующихъ въ пространствѣ, но никакая картинка не можетъ передать послѣдовательности явленій, совершающихся другъ за другомъ во времени. Поэтому ясно, что картинка можетъ служить пособіемъ для упражненія въ сосчитываніи предметовъ, на ней изображенныхъ, въ производствѣ сложенія и умноженія: если напр. на картинкѣ изображены семь птицъ, сидящихъ на одной вѣткѣ дерева, и три птицы, сидящія на другой вѣткѣ, то по поводу этой картинки цѣлесообразно задать вопросы: «сосчитайте, сколько всего птицъ сидитъ на деревѣ»,—или: «на одной вѣткѣ сидитъ семь птицъ, на другой три; сколько всего птицъ на деревѣ»? Точно также, если изображены четыре пары птицъ, сидящихъ на вѣткахъ дерева, то по поводу этой картинки умѣстно составить задачу: «на каждой изъ четырехъ вѣтокъ дерева сидитъ по двѣ птицы; сколько всего птицъ на деревѣ»? Разумѣется, при этомъ нужно, чтобы иллюстраціи были выполнены безукоризненно, и чтобы птицы были болѣе или менѣе одинаковой формы и величины—это облегчаетъ счетъ; при иллюстраціи задачи на умноженіе важно, чтобы каждая пара птицъ или вообще каждая изъ равныхъ группъ предметовъ рѣзко отдѣлялась отъ другихъ. Кромѣ того, слѣдуетъ вообще признать, что счетъ предметовъ по картинкамъ умѣстенъ только какъ дополненіе къ счету реальныхъ предметовъ; конечно, цѣлесообразнѣе считать дѣйствительные орѣхи или перья, чѣмъ нарисованные, потому что при счетѣ дѣйствительныхъ предметовъ учащіеся воспринимаютъ и зрительныя, и осязательныя, и мускульныя впечатлѣнія, а при счетѣ по картинкѣ только зрительныя. Поэтому умѣстно изобразить на счетныхъ картинкахъ напр. животныхъ, какіе нибудь крупные плоды или вообще предметы, которые нельзя имѣть въ классѣ, но едва ли цѣлесообразно изображать палочки, пальцы, очки игральныхъ картъ и вообще все то, что можно считать «на самомъ дѣлѣ».

Если такимъ образомъ можно признать въ извѣстной мѣрѣ полезнымъ употребленіе картинокъ для иллюстраціи счета и прямыхъ дѣйствій—сложенія и умноженія, то не такъ просто обстоитъ дѣло съ обратными дѣйствіями—вычитаніемъ и дѣленіемъ. Дѣло въ томъ, что мы не можемъ изобразить на одной и той же картинкѣ два или нѣсколько моментовъ, а тѣмъ болѣе цѣлый процессъ дѣйствія; если напр. дается задача: «на деревѣ висѣло 10 грушъ; 3 изъ нихъ упали; сколько грушъ осталось на деревѣ»?—то на картинкѣ невозможно изобразить десять грушъ висящими на деревѣ и въ то же время три изъ нихъ лежащими на землѣ; а если нарисовать, какъ это дѣлается, семь грушъ висящими на деревѣ и три груши лежащими на землѣ, то ученикъ, который разсуждаетъ самостоятельно, а не по указкѣ учителя, составитъ по этой картинкѣ задачу на сложеніе: «7 грушъ висятъ на деревѣ, а 3 лежатъ на землѣ; сколько всего грушъ? «Для иллюстраціи же задачи на вычитаніе трехъ грушъ изъ десяти было бы необходимо по крайней мѣрѣ двѣ картинки: на одной нужно было бы изобразить 10 грушъ висящими на деревѣ, а на другой—7 изъ нихъ на прежнихъ мѣстахъ на деревѣ и 3 упавшими на землю. И вообще, для того, чтобы изобразить процессъ дѣйствія надъ величинами или группами предметовъ, нужна не картинка, а кинематографъ, и только тогда, когда онъ будетъ примѣненъ въ школѣ, мы сможемъ иллюстрировать на урокахъ ариѳметики явленія, протекающія во времени.

Еще менѣе удачными нужно признать иллюстраціи основныхъ понятій о размѣрахъ и скоростяхъ, даваемыя въ нѣкоторыхъ задачникахъ. Понятіе о предметахъ длинныхъ и короткихъ, высокихъ и низкихъ, широкихъ и узкихъ, толстыхъ и тонкихъ, тяжелыхъ и легкихъ—можно и нужно дать непосредственно: всегда и во всякой школѣ учитель можетъ показать длинную и короткую палку, толстую и тонкую книгу, тяжелый и легкій камень и т. д., и изображать все это на картинкахъ нѣтъ ровно никакой надобности; даже понятіе о большей или меньшей глубинѣ можно дать при помощи сосуда съ водой, а пытаться изобразить на картинкѣ различныя скорости движенія—значитъ ставить себѣ недостижимыя цѣли.

Изъ предыдущаго ясно, что картинки являются лишь вспомогательнымъ средствомъ для достиженія дѣйствительной конкретности въ обученіи; все, что можно, нужно показывать «на самомъ дѣлѣ», съ помощью реальныхъ предметовъ и дѣйствій надъ ними, выполняемыхъ самими учащимися, и только тамъ, гдѣ невозможны такія реальныя иллюстраціи, полезно обращаться къ картинкѣ, преимущественно для выполненія счета и прямыхъ дѣйствій.

Мнѣ остается разобрать еще одинъ модный вопросъ методики ариѳметики—какую роль при обученіи счисленію играетъ такъ называемое распредѣленіе задачъ по типамъ.

По этому вопросу существуютъ два взаимно противоположныхъ мнѣнія: одни утверждаютъ, что распредѣленіе задачъ по типамъ значительно повышаетъ успѣхи дѣтей въ рѣшеніи задачъ и ведетъ къ тому, что они «чуть не на лету» рѣшаютъ любую задачу употребительныхъ типовъ, другіе, наоборотъ, категорически высказываются противъ классификаціи задачъ по типамъ, находя, что рѣшеніе задачъ по типамъ убиваетъ мышленіе.

Примыкая по существу къ послѣднему мнѣнію, я постараюсь выяснить, въ чемъ здѣсь суть дѣла. Никто не будетъ спорить противъ того, что задачи должны быть предлагаемы дѣтямъ въ извѣстной послѣдовательности, такъ чтобы рѣшеніе дальнѣйшихъ облегчалось и подготовлялось рѣшеніемъ предыдущихъ; иначе говоря, врядъ ли кто будетъ возражать противъ принципа распредѣленія задачъ сообразно педагогическимъ требованіямъ; суть только въ томъ, какое распредѣленіе задачъ нужно считать удовлетворяющимъ педагогическимъ требованіямъ. Съ одной стороны мы можемъ распредѣлять задачи сообразно ихъ содержанію: въ одну группу отнести на р. задачи на вычисленіе прибыли или убытка, въ другую—задачи на передвиженіе и т. д.; но еслибы мы попытались провести эту классификацію черезъ весь курсъ, то встрѣтились бы съ непреодолимыми затрудненіями, такъ какъ въ каждой группѣ оказались бы наряду съ очень легкими задачами и очень трудныя, и никакъ нельзя было бы переходить последовательно отъ одной группы къ другой. Съ другой стороны можно распредѣлять задачи по методамъ ихъ рѣшенія: задачи на сложеніе, вычитаніе, умноженіе и дѣленіе въ отдѣльности и на тѣ или иныя опредѣленныя комбинаціи этихъ дѣйствій. Эта последняя классификація отчасти проводится въ каждомъ задачникѣ; но разумѣется и она сама по себѣ недостаточна, такъ какъ и среди задачъ, рѣшаемыхъ однимъ и тѣмъ же пріемомъ, напр. дѣленіемъ, могутъ быть задачи легкія и трудныя по своему содержанію. Если мы разсмотримъ, какъ распредѣляются задачи «по типамъ» въ употребительныхъ задачникахъ, то замѣтимъ полное смѣшеніе обоихъ способовъ классификаціи: съ одной стороны есть типы, объединенные методомъ рѣшенія, напр. задачи на приведеніе къ единицѣ; съ другой стороны имѣются типы, объединенные исключительно содержаніемъ задачъ, напр. группы задачъ на «бассейны», на «встрѣчу», на «обмѣнъ предметовъ» и т. д. Можно однако замѣтить, что въ этомъ распредѣленіи задачъ по «типамъ» есть особая система, и состоитъ она въ слѣдующемъ. Какъ извѣстно, есть задачи, въ которыхъ учащихся особенно затрудняетъ постановка какого нибудь одного вопроса; возьмемъ напр. задачу на «встрѣчу», разсмотрѣнную выше: «Разстояніе между двумя деревнями 35 верстъ. Изъ первой деревни вышелъ во вторую пѣшеходъ; въ каждый часъ онъ проходитъ

4 версты. Въ это самое время навстрѣчу ему изъ второй деревни вышелъ другой пѣшеходъ, который проходитъ въ каждый часъ по 3 версты. Черезъ сколько часовъ они встрѣтятся»? Здѣсь учащимся наиболѣе трудно поставить первый вопросъ: «на сколько верстъ уменьшается разстояніе между пѣшеходами въ каждый часъ»? Если же этотъ вопросъ уже поставленъ, то дальнѣйшее рѣшеніе не представляетъ затрудненій; этотъ вопросъ является, такимъ образомъ, ключемъ ко всей задачѣ. Точно также, если дана задача: «9 грушъ стоятъ 15 коп.; сколько стоятъ 15 такихъ же грушъ»?—то здѣсь затрудненіе въ томъ обстоятельствѣ, что учащіеся, не знающіе дробей, не могутъ узнать цѣну одной груши; и ключъ къ рѣшенію задачи въ томъ, чтобы поставить вопросъ: «сколько стоятъ три груши»? Вотъ такія то задачи, затруднительныя для учащихся или по методу ихъ рѣшенія, или чаще всего по содержанію, и сгруппированы въ особые «типы» въ упомянутыхъ употребительныхъ задачникахъ, причемъ къ каждому «типу» отнесены задачи, имѣющія одинаковый «ключъ» къ рѣшенію. Такъ напр. въ задачахъ на «бассейны» ключъ состоитъ въ томъ, чтобы спросить, сколько вливается (или выливается) всего воды въ одну минуту, или другую единицу времени; въ задачахъ на «встрѣчу» ключъ, какъ указано, въ вопросѣ, насколько уменьшается разстояніе между ѣдущими въ часъ; въ задачахъ на «пропорціональное дѣленіе» ключъ въ томъ, чтобы узнать, на сколько всего частей придется дѣлить данную величину; и вотъ эти задачи распредѣляются

въ задачникахъ по тремъ совершенно различнымъ типамъ, хотя ариѳметическій способъ рѣшенія ихъ по большей части совершенно одинаковъ: приходится дѣлить одно данное число на сумму двухъ другихъ данныхъ чиселъ. Мало того, есть задачи, рѣшаемыя совершенно тѣми же дѣйствіями и въ томъ же порядкѣ, но не относимыя къ числу «типичныхъ», напр. такая задача: «Въ классѣ учатся 17 мальчиковъ и 13 дѣвочекъ; имъ нужно раздать 150 тетрадей, каждому поровну; сколько тетрадей придется дать каждому изъ учащихся»?—или такая: «Въ фунтѣ сахару 50 кусковъ; я расходую утромъ 3 куска сахару, а вечеромъ 2; на сколько дней мнѣ хватитъ фунта сахару»? Подобныя задачи рѣшаются также дѣленіемъ одного даннаго числа на сумму двухъ другихъ, но по содержанію своему настолько просты, что не нуждаются въ ключѣ; и вотъ мы видимъ, что такія задачи не попадаютъ въ число «типичныхъ». Распредѣленіе задачъ по типамъ, обычно практикуемое, пригодно такимъ образомъ для совершенно особой цѣли: для запоминанія ключей, ведущихъ къ разрѣшенію наиболѣе затруднительныхъ задачъ. Такое запоминаніе ключей очень полезно на экзаменахъ, и нѣтъ ничего удивительнаго, если учащіеся, обученные по подобнымъ задачникамъ, оказывали на испытаніяхъ выдающіеся успѣхи въ рѣшеніи «типичныхъ» задачъ. Но всякій педагогъ знаетъ, что подобное запоминаніе «ключей» нисколько не доказываетъ сознательнаго усвоенія предмета, и учащіеся, очень хорошо «натасканные» на рѣшеніи «типичныхъ» задачъ, могутъ стать втупикъ передъ рѣшеніемъ самой простой задачи «не типичной» въ журналѣ «Народное Образованіе» за мартъ 1910 г. приводится напр. случай, когда дѣвочка, рѣшившая сперва довольно трудную задачу, затѣмъ не могла отвѣтить на вопросъ, сколько она выручитъ денегъ за полтора десятка яицъ по 12 коп. десятокъ; «мы», говорила она, «на яйца задачъ не рѣшали».

Поэтому я полагаю, что принципъ распредѣленія задачъ на типы сообразно «ключамъ» къ ихъ рѣшенію долженъ быть рѣшительно отвергнутъ. Распредѣлять задачи слѣдуетъ прежде всего по ариѳметическому методу ихъ рѣшенія; а въ каждой группѣ задачъ, рѣшаемыхъ однимъ и тѣмъ же методомъ,—по содержанію въ порядкѣ возврастающей трудности При томъ въ особыя группы выдѣляются прежде всего задачи, рѣшаемыя однимъ дѣйствіемъ: сложеніемъ, вычитаніемъ, умноженіемъ или дѣленіемъ—какъ это и теперь дѣлается. Затѣмъ можно будетъ выдѣлить задачи, рѣшаемыя послѣдовательностью двухъ дѣйствій: сложеніемъ и вычитаніемъ, сложеніемъ и умноженіемъ и т. д., причемъ въ одну и ту же группу попадутъ задачи, рѣшаемыя не только одинаковыми дѣйствіями, но и въ одинаковомъ порядкѣ, т.-е. такія, которыя имѣютъ одну и ту же формулу рѣшенія. При этомъ, конечно, найдутъ свое мѣсто и «типичныя» задачи въ обычномъ смыслѣ этого слова напр. задачи на «встрѣчу» попадутъ въ группу задачъ, рѣшаемыхъ дѣленіемъ одного изъ данныхъ чиселъ на сумму двухъ другихъ, а задачи на «ѣзду въ догонку»—въ близкую группу задачъ, рѣшаемыхъ дѣленіемъ одного изъ даннаго числа на разность двухъ другихъ; подобныя задачи, какъ болѣе затруднительныя по содержанію, будутъ, конечно, помѣщаться въ концѣ соотвѣтствующихъ отдѣловъ; но запоминать ключи къ ихъ рѣшенію не понадобится, если разработка ихъ будетъ произведена конкретно, и въ случаѣ надобности «въ лицахъ», какъ было разсказано выше.

Считаю нужнымъ подчеркнуть, что въ задачникахъ для учащихся не должно быть, по моему, никакихъ подзаголовковъ, характеризующихъ типъ рѣшенія; эти подзаголовки прямо подсказываютъ опредѣленный способъ рѣшенія, и если даже распредѣлить задачи по ариѳметическимъ методамъ ихъ рѣшенія и обозначить это распредѣленіе въ подзаголовкахъ соотвѣтствующими словами или общими формулами, то способъ рѣшенія будетъ навязанъ вполнѣ опредѣленно.

Въ повторительныхъ отдѣлахъ, гдѣ даются болѣе сложныя задачи на всѣ четыре дѣйствія, полезно провести еще идею распредѣленія задачъ по областямъ жизни, напр. дать цѣлый рядъ задачъ изъ области сельскаго хозяйства, торговыхъ разсчетовъ, строительнаго дѣла, кооперативнаго дѣла, ссудосберегательныхъ операцій и т. д., вообще дать отдѣлы, въ каждомъ изъ которыхъ въ связномъ рядѣ задачъ была бы всесторонне представлена въ числахъ та или иная область жизни, окружающей ученика. И это, конечно, будетъ содѣйствовать сознательному усвоенію «счетной мудрости» въ гораздо большей мѣрѣ, чѣмъ рѣшеніе задачъ по типамъ.

ГЛАВА IV.

Курсъ дробей въ начальной школѣ.

До послѣдняго времени въ курсъ начальной школы входили обычно только вычисленія надъ простѣйшими дробями, выполняемыя по соображенію и преимущественно устно. Знаніе этихъ вычисленій имѣетъ непосредственное практическое значеніе, и подобныя вычисленія нерѣдко встрѣчаются учащимся въ житейскомъ обиходѣ: найти стоимость $1/2$ ф. сахару, $3/4$ арш. сукна, $1/8$ ф. чаю и т. п.—все это вопросы, непосредственно связанные съ практикой жизни. При трехлѣтнемъ срокѣ обученія трудно было дать учащимся что нибудь сверхъ этого небольшого цикла свѣдѣній; но современныя требованія идутъ дальше и при четырехлѣтнемъ (а тѣмъ болѣе при пятилѣтнемъ) курсѣ могутъ быть вполнѣ удовлетворены. Совершенно необходимо, чтобы учащіеся научились выполнять вычисленія съ десятичными дробями, такъ какъ эти дроби постоянно примѣняются въ техническихъ разсчетахъ и въ процентныхъ вычисленіяхъ, а знаніе послѣднихъ въ свою очередь имѣетъ прямую практическую важность; кромѣ того, десятичныя дроби необходимы при употребленіи метрической системы мѣръ, также внѣдряющейся въ нашъ жизненный обиходъ. Что касается общихъ правилъ дѣйствій надъ простыми дробями, то знаніе ихъ для практики какъ будто менѣе необходимо: если знаменатели дробей невелики, то вычисленія выполняются по соображенію, если же знаменатели дробей сколько нибудь сложны, то при желаніи можно замѣнить простыя дроби десятичными, точными или приближенными, какъ это и дѣлается въ техническихъ разсчетахъ; а вопросы, требующіе разысканія части отъ цѣлаго или наоборотъ, можно рѣшать и не зная общихъ правилъ умноженія и дѣленія на дробь, двумя послѣдовательными дѣйствіями умноженія и дѣленія на цѣлое число; напр. желая найти, сколько верстъ пройдетъ поѣздъ за $^3/_4$ часа, если дана его часовая скорость, мы, конечно, можемъ рѣшить вопросъ, узнавъ сперва, сколько верстъ пройдетъ поѣздъ въ одну четверть часа, а потомъ—сколько верстъ онъ пройдетъ въ три четверти часа, и тѣмъ не менѣе при сколько нибудь удовлетворительномъ построеніи курса безъ изученія дѣйствій надъ простыми дробями, въ частности, безъ понятія объ умноженіи и дѣленіи на дробь обойтись нельзя: для того, чтобы умѣть вычислять хотя бы площадь прямоугольника, стороны котораго выражены дробными числами, нужно имѣть понятіе объ умноженіи на дробь, простую или десятичную; а если школа пожелаетъ ознакомить дѣтей съ употребленіемъ буквъ, то предварительно они должны быть знакомы съ умноженіемъ и дѣленіемъ на дробь,—иначе составляемыя ими общія формулы не будутъ годиться для случая дробныхъ значеній буквъ. Кромѣ того, знакомство съ понятіемъ объ умноженіи и дѣленіи на дробь позволяетъ нерѣдко упрощать вычисленія; и этого одного уже достаточно чтобы признать цѣлесообразнымъ ознакомленіе дѣтей съ понятіями объ этихъ дѣйствіяхъ.

Знакомство съ простѣйшими долями можетъ начинаться съ перваго же года обученія, такъ какъ дѣти обычно еще въ дошкольномъ возрастѣ знаютъ, что такое половина и четверть и употребляютъ эти слова сознательно. Въ первый годъ достаточно будетъ использовать эти дошкольныя познанія дѣтей и отчасти ихъ расширить, ознакомляя дѣтей съ половинами, четвертями, восьмыми, третьими и шестыми долями и образуемыми изъ нихъ дробями и рѣшая простѣйшіе вопросы изъ этой области—обозначеніе долей и дробей, сложеніе и вычитаніе одноименныхъ долей и дробей, а затѣмъ и разноименныхъ съ помощью раздробленія болѣе крупныхъ долей въ болѣе мелкія, нахожденіе данной доли отъ цѣлаго числа (когда результатъ есть цѣлое число) и т. п. Первоначальное ознакомленіе съ долями, какъ извѣстно, ведется наглядно, при помощи дѣйствительнаго дѣленія предметовъ на части; лучше всего прибѣгать къ дѣленію такихъ предметовъ, которые ясно представляются дѣтямъ, какъ нѣчто цѣлое, непохожее на свои части,— напр. яблоко, круглый хлѣбъ, листъ бумаги и т. д. Изъ числа искусственныхъ наглядныхъ пособій наиболѣе распространено изображеніе дробей съ помощью отрѣзковъ прямыхъ линій, частей круга или же прямоугольника, раздѣленнаго на прямоугольныя или квадратныя клѣтки; слѣдуетъ имѣть въ виду, что сравнительное достоинство этихъ наглядныхъ пособій было изслѣдовано нѣмецкимъ педагогомъ-экспериментаторомъ Вальземанномъ; онъ заставлялъ учащихся оцѣнивать величину долей и частей, представленныхъ каждымъ изъ этихъ трехъ способовъ, и нашелъ, что наименьшее число ошибокъ получается при употребленіи прямоугольниковъ, раздѣленныхъ на прямоугольныя и квадратныя доли; форма круга оказалась нѣсколько менѣе благопріятной, а употребленіе прямой линіи вело къ наибольшему числу ошибочныхъ оцѣнокъ.

Во второй годъ обученія придется нѣсколько расширить этотъ кругъ первоначальныхъ свѣдѣній о доляхъ, разсматривая доли съ наиболѣе употребительными знаменателями въ области первыхъ двухъ десятковъ. Въ этой области могутъ быть разобраны такіе вопросы: изображеніе и чтеніе дробныхъ чиселъ; смыслъ числителя и знаменателя; обращеніе цѣлаго числа съ дробью въ неправильную дробь и наоборотъ; сложеніе и вычитаніе дробей съ одинаковыми знаменателями; умноженіе дроби на цѣлое число помощью умноженія числителя, а также дѣленіе дроби на цѣлое помощью дѣленія числителя (если это дѣленіе выполняется нацѣло); нахожденіе части отъ даннаго числа (при условіи, что данное цѣлое дѣлится на знаменателя дроби, напр. найти $^3/_4$ отъ 16), и нахожденіе нѣкотораго числа по данной его части (въ томъ случаѣ, когда эта часть представляетъ цѣлое число, дѣлящееся на числителя данной дроби, напр. $^3/_4$ искомаго числа равны 24); наконецъ раздробленіе болѣе крупныхъ долей въ болѣе мелкія и составленіе болѣе крупныхъ долей изъ болѣе мелкихъ, а также сложеніе и вычисленіе дробей съ разными знаменателями, въ тѣхъ простѣйшихъ случаяхъ, когда однѣ изъ данныхъ долей непосредственно раздробляются въ другія. Разумѣется, всѣ эти вопросы разбираются наглядно и по соображенію, и преимущественно устно.

На третій годъ выпадетъ прежде всего дальнѣйшее расширеніе круга долей, съ которыми производятся вычисленія; если во второмъ году дѣти знакомились съ дробями со знаменателями въ предѣлѣ первыхъ двухъ десятковъ, то теперь слѣдуетъ вводить въ вычисленія всѣ доли и дроби съ наиболѣе употребительными знаменателями въ предѣлѣ сотни. Самый существенный вопросъ въ курсѣ даннаго года—это раздробленіе болѣе крупныхъ долей въ болѣе мелкія и наоборотъ, что необходимо для приведенія дробей къ одному знаменателю и сокращенія ихъ при сложеніи и вычисленій. Конечно и здѣсь это раздробленіе должно выполняться не по общимъ правиламъ, а по соображенію, на основаніи знанія кратныхъ соотношеній между важнѣйшими долями; учащіеся должны ясно понимать и твердо помнить, что напр. 6-ыя доли можно раздробить въ 12-я, 18-я, 24-я и т. д.; 14-ыя— въ 28-я, 42-я и т. д. Разсужденія ведутся здѣсь приблизительно такъ. Пусть нужно сложить $^3/_8$ и $^5/_{12}$; надо сообразить прежде всего, въ какія доли можно раздробить и 8-ыя, и 12-ыя—это будутъ 24-ыя доли. Дальше разсуждаемъ такимъ образомъ: въ цѣлой единицѣ 24 двадцать-четвертыхъ, значитъ въ одной восьмой—3 двадцать-четвертыхъ, а въ трехъ восьмыхъ—9 двадцать-четвертыхъ; точно также въ одной двѣнадцатой—2 двадцать-четвертыхъ, а въ пяти двѣнадцатыхъ—10 двадцать-четвертыхъ; итакъ $^3/_8={}^9/_{24}$, а $^5/_{12}={}^{10}/_{24}$; складывая, получаемъ $^{19}/_{24}$. Разумѣется, и здѣсь полезно начинать со случаевъ, когда одинъ изъ знаменателей дѣлится на всѣхъ остальныхъ потомъ перейти къ случаямъ, когда знаменатели не имѣютъ вовсе общихъ дѣлителей, и наконецъ, разсматривать случаи, когда знаменатели имѣютъ общихъ дѣлителей и приходится подыскивать по соображенiю такое число, которое дѣлилось бы на данныхъ знаменателей. Одновременно съ этимъ можно разбирать и вопросы, въ которыхъ приходится узнать, сколько разъ данная дробь содержится въ другой дроби или въ цѣломъ числѣ (если при этомъ искомый отвѣтъ выражается цѣлымъ числомъ); эти вопросы на данной ступени рѣшаются съ помощью раздробле-бленiя данныхъ чиселъ въ одинаковыя доли. Точно также къ курсу этого года слѣдуетъ отнести и дѣленiе дроби на цѣлое число путемъ умноженiя знаменателя (что сводится къ раздробленiю данныхъ долей въ болѣе мелкiя), и умноженiе дроби на цѣлое число путемъ дѣленiя знаменателя (т.-е. посредствомъ замѣны данныхъ долей болѣе крупными); кромѣ того, нужно выяснить дѣтямъ понятiе о дроби, какъ о частномъ отъ дѣленiя числителя на знаменателя, и упражнять ихъ въ дѣйствіяхъ надъ смѣшанными числами, проходя сложеніе и вычитаніе ихъ, умноженіе и дѣленіе на цѣлое число; въ соотвѣтствіи съ расширеніемъ круга свѣдѣній о дробяхъ могутъ быть усложняемы и задачи на нахожденіе части даннаго числа и числа по данной его части.

Наконецъ, къ третьему же году слѣдуетъ отнести и курсъ простѣйшихъ десятичныхъ дробей (ознакомленіе съ десятыми, сотыми и тысячными долями), съ рѣшеніемъ при помощи ихъ всѣхъ подходящихъ вопросовъ, но безъ введенія понятія объ умноженіи и дѣленіи на дробь. Первоначальное знакомство съ десятичными дробями должно, конечно, сопровождаться подходящими иллюстраціями, для чего хорошій матеріалъ даютъ метрическія мѣры и подраздѣленія рубля. Затѣмъ (сохраняя все время взглядъ на дробь, какъ на собраніе конкретныхъ долей цѣлаго) можно послѣдовательно изучить соотношеніе между десятичными долями различныхъ разрядовъ, выяснить тѣсную связь ихъ съ нумераціей цѣлыхъ чиселъ и научить учащихся быстрому обращенію болѣе крупныхъ разрядныхъ единицъ въ болѣе мелкія и наоборотъ. Послѣ этого учащіеся легко пріобрѣтутъ привычку смотрѣть на десятичную дробь, какъ на совокупность долей различныхъ разрядовъ, расположенныхъ по десятичной системѣ, и безъ труда смогутъ изучить и прилагать въ задачахъ сложеніе и вычитаніе десятичныхъ дробей, а также умноженіе десятичной дроби на цѣлое число. Что же касается дѣленія, то, разумѣется, сперва слѣдуетъ задавать только такія задачи, въ которыхъ частное отъ дѣленія десятичной дроби на цѣлое число выражалось бы конечной десятичной дробью, а также такія, въ которыхъ приходилось бы рѣшать, сколько разъ данная десятичная дробь заключается въ другой или въ цѣломъ числѣ, причемъ искомое частное было бы цѣлымъ; въ связи съ дѣленіемъ слѣдуетъ разобрать, на несложныхъ примѣрахъ, и вопросъ относительно обращенія простой дроби въ десятичную (и наоборотъ),—или путемъ непосредственнаго раздробленія, или посредствомъ дѣленія числителя на знаменателя. Можно коснуться здѣсь и случаевъ приближеннаго дѣленія десятичной дроби на цѣлое число (подобно дѣленію съ остаткомъ въ цѣлыхъ числахъ), а также и случаевъ, когда простая дробь не обращается въ конечную десятичную; въ этихъ случаяхъ достаточно лишь довести учащихся до сознанія, что дѣленіе не закончится, и не слѣдуетъ поднимать и вопроса о періодическихъ дробяхъ.

Въ этомъ же циклѣ слѣдуетъ рѣшать и вопросы, касающіеся нахожденія той или иной десятичной части даннаго числа, или наоборотъ, нахожденія числа по данной его десятичной части, но опять же пока безъ введенія понятія объ умноженіи и дѣленіи на дробь, а какъ и въ простыхъ дробяхъ, двумя дѣйствіями умноженія и дѣленія на цѣлое число. Сюда же войдетъ и ученіе о процентѣ, какъ сотой долѣ числа, и тутъ же должны рѣшаться, съ помощью изученныхъ дѣйствій, и простѣйшія задачи на выполненіе процентныхъ вычисленій. Замѣчу, что здѣсь нужно обратить большое вниманіе на устное вычисленіе процентовъ, и между прочимъ необходимо, чтобы дѣти умѣли замѣнять процентныя числа простыми дробями и наоборотъ, напр. чтобы они знали, что 75% все равно, что $^3/_4$ даннаго числа, а $^1/_5$ все равно, что 20%; въ концѣ концовъ они должны даже, путемъ постоянныхъ упражненій, запомнить процентныя числа, соотвѣтствующія простѣйшимъ дробямъ,—напр. что 50% соотвѣтствуетъ половинѣ, $33^1/_3$%— одоній трети, 25%—четвертой долѣ и т. д.; при этомъ условіи процентныя вычисленія могутъ быть значительно упрощаемы.

Наконецъ въ четвертый годъ обученія тѣ свѣдѣнія о дробяхъ, съ которыми учащіеся до той поры познакомились, должны быть расширены, углублены и приведены въ систему, причемъ дѣйствія надъ простыми и десятичными дробями слѣдуетъ изучать параллельно и разсматривать десятичныя дроби уже какъ частный случай простыхъ. Въ этомъ циклѣ придется прежде всего остановиться на измѣненіи величины дроби при измѣненіи ея числителя и знаменателя, на неизмѣняемости этой величины при увеличеніи или уменьшеніи числителя и знаменателя въ одинаковое число разъ, и на преобразованіяхъ, основанныхъ на этомъ послѣднемъ свойствѣ дроби—на сокращеніи дробей п р о с т ы х ъ и д е с я т и ч н ы х ъ, и приведеніи ихъ къ одному знаменателю. Само собою разумѣется, что и въ этомъ циклѣ слѣдуетъ вводить въ вычисленія преимущественно такія дроби, которыя сколько нибудь употребительны въ практикѣ (напр. 200-ыя или

360-ыя доли, но не 211-ыя или 359-ыя), т.-е, такія знаменатели которыхъ не особенно велики и находятся въ ясныхъ кратныхъ соотношеніяхъ съ важнѣйшими числами первой сотни; поэтому и въ данномъ циклѣ можно не изучать теоріи дѣлимости чиселъ и общихъ способовъ нахожденія общаго наибольшаго дѣлителя и наименьшаго краткаго: сокращеніе дробей можно попрежнему выполнять постепенно, путемъ отысканія «на глазъ» общихъ множителей числителя и знаменателя, а приведеніе къ одному знаменателю—тѣми же способами, что и на предыдущей ступени обученія, т. е. путемъ постепеннаго раздробленія данныхъ долей въ болѣе мелкія и подысканія, по соображенію, такихъ долей, въ которыя можно было бы раздробить всѣ данныя. Изъ всей теоріи дѣлимости придется воспользоваться развѣ только названіями: «общій дѣлитель», «общій наибольшій дѣлитель», «общее кратное» и т. д., которыя могутъ быть введены и употребляемы, какъ полезныя для сокращенія рѣчи.

Изученіе, или вѣрнѣе, повтореніе сложенія и вычитанія дробныхъ чиселъ не представитъ при этомъ никакихъ затрудненій. Не мѣшаетъ обратить вниманіе учащихся на то, что при сложеніи и вычитаніи обыкновенныхъ дробей приведеніе къ одному знаменателю обязательно, а при соотвѣтствующихъ дѣйствіяхъ надъ десятичными дробями—необязательно.

Наконецъ мы должны будемъ подойти къ самому трудному вопросу всего курса—къ ученію объ умноженіи и дѣленіи на дробь. Для объясненія смысла и правила дѣйствія умноженія на дробь существуетъ нѣсколько пріемовъ. Въ учебникахъ ариѳметики стараго типа пр вило умноженія на дробь выводит я при помощи общаго опредѣленія умноженія: «умножить значитъ составить изъ множимаго новое число такъ, какъ множитель составленъ изъ единицы» На основаніи этого опредѣленія разсуждаютъ далѣе въ такомъ родѣ: «умножить 5 на $^3/_4$ значитъ, согласно опредѣленію, составить зъ 5 новое число такъ, какъ множитель $^3/_4$ составленъ изъ единицы; но число $^3/_4$ составлено изъ единицы такъ: взята единица, раздѣлена на 4 равныхъ части, и такихъ частей взято 3; поэтому для полученія искомаго произведенія мы должны раздѣлить число 5 на 4 равныхъ части, и полученное число $^5/_4$ взять (слагаемымъ) 3 раза; будемъ имѣть $^{15}/_4$». Послѣ этого путемъ сравненія найденнаго числа съ данными выводится и правило умноженія на дробь.

Общеизвѣстны и тѣ серьезные недостатки, которыми страдаетъ этотъ пріемъ объясненія вопроса. Во первыхъ, онъ не вполнѣ удовлетворителенъ съ логической стороны, такъ какъ способъ составленія числа изъ единицы, подразумѣваемый въ немъ, является не единственнымъ, и мы можемъ, нисколько не нарушая буквы опредѣленія, разсуждать слѣдующимъ образомъ; «число $^3/_4$ составлено изъ единицы такъ: взята единица 3 раза слагаемымъ, затѣмъ 4 раза слагаемымъ, и первое изъ полученныхъ чиселъ сдѣлано числителемъ дроби, второе—ея знаменателемъ»; составляя же по этому «способу» новое число изъ множимаго 5, мы получимъ дробь $^{15}/_{20}$, а не $^{15}/_{4}$, какъ слѣдовало бы. Во вторыхъ, на данной ступени обученія требуется только выяснить смыслъ умноженія на дробь, а не умноженія вообще, и наконецъ, сообщая дѣтямъ отвлеченное опредѣленіе, да еще чисто догматически, мы добьемся развѣ только того, что они запомнятъ сказанныя учителемъ слова, но чтобы усвоеніе это было сколько-нибудь сознательнымъ— въ этомъ можно сильно сомнѣваться.

Другой старинный пріемъ, въ послѣдніе годы воскрешенный въ нѣкоторыхъ учебникахъ, *), основанъ на законахъ измѣненія произведенія; слѣдуя ему, разсуждаютъ примѣрно такъ: «вмѣсто умноженія 5 на $^{3}/_{4}$ будемъ множить 5 на 3; получимъ 15. Но отбросивъ знаменателя во множителѣ, мы увеличили множителя въ 4 раза; слѣд. и произведеніе увеличилось въ 4 раза противъ истиннаго; чтобы его исправить, уменьшаемъ найденное число 15 въ 4 раза и получаемъ $^{15}/_{4}$». Но подобный пріемъ, несмотря на свою внѣшнюю простоту, также по существу не пріемлемъ, такъ какъ заключаетъ въ себѣ явную логическую ошибку: вѣдь законъ объ увеличеніи произведенія въ нѣсколько разъ при увеличеніи одного изъ сомножителей во столько же разъ былъ нами установленъ пока только для случая перемноженія цѣлыхъ чиселъ, а справедливъ ли онъ для случая умноженія на дробь, мы не знаемъ напередъ и не имѣемъ права ссылаться на него, пока не установили

---

*) А. Б. Сахаровъ, Ариѳметика. Опытъ методическаго изложенія предмета.

на опытѣ или путемъ разсуженія, что онъ имѣетъ мѣсто и для дробныхъ чиселъ. Для того же, чтобы въ этомъ убѣдиться, нужно прежде всего установить, что значить умножить какое либо число на $^3/_4$ или вообще на дробь.

Если мы, несмотря на необоснованность нашего заключенія, все же пришли къ вѣрному результату, то это поэтому, что въ нашемъ разсужденіи есть молчаливо подразумѣваемое определеніе смысла умноженія на $^3/_4$: мы въ сущности вводимъ, не оговаривая того, условіе—считать произведеніемъ 5 на $^3/_4$ такое число, которое въ 4 раза меньше произведенія 5 на 3. Наше разсужденіе было бы логически обосновано, если бы мы ввели это опредѣленіе предварительно и въ явномъ видѣ, но врядъ ли кто станетъ сомнѣваться, что подобное опредѣленіе, чисто отвлеченное, да еще изложенное въ неуклюжей формѣ, будетъ совершенно недоступно для учащихся начальной школы.

Иные авторы *) предлагаютъ взамѣнъ того просто вводить условіе вродѣ слѣдующаго: «подъ произведеніемъ двухъ робей $\frac{a}{в}$ и $\frac{c}{д}$ мы будемъ разумѣть дробь $\frac{ac}{вд}$» (числителемъ которой является произведеніе числителей данныхъ дробей, а знаменателемъ—произведеніе знаменателей),—и сопровождать это условіе подходящей графической иллюстраціей. Такой пріемъ не грѣшитъ уже противъ логики, потому что

*) Мрочекъ и Филиппович, Педагогика математики, Т. .

опредѣленіе умноженія вводится въ правильной и явной формѣ; но съ педагогичеекой точки зрѣнія онъ столь же неудовлетворителенъ, какъ и прежніе, такъ какъ цѣль установленія указанныхъ здѣсь условій остается совершенно неясной для учащихся. Взрослый человѣкъ, который изучаетъ ариѳметику въ научномъ изложеніи, можетъ сознавать, что подобныя условія вводятся ради сохраненія основныхъ законовъ ариѳметическихъ дѣйствій при расширеніи понятія о числѣ; но учащемуся начальной школы такая точка зрѣнія совершенно недоступна, и онъ восприметъ сообщаемое ему условіе просто какъ правило, которое надо выучить, хотя въ глубинѣ души будетъ сознавать, что его законный вопросъ—зачѣмъ введено это условіе—оставленъ безъ отвѣта. Что же касается графической иллюстраціи, то она можетъ пояснить только содержаніе, принимаемаго условія, но не цѣль, ради которой оно принято. Если напр. учащійся беретъ $^3/_4$ нѣкотораго разграфленнаго на клѣтки прямоугольника, составляющаго въ свою очередь $^2/_3$ другого большаго прямоугольника, и при этомъ убѣждается, что получаемая въ результатѣ фигура составляетъ $^8/_{15}$ большаго прямоугольника, то онъ выноситъ наглядное подтвержденіе той мысли, что $^4/_5$ отъ $^2/_3$ равны $^8/_{15}$, но не видитъ никакихъ мотивовъ, въ силу которыхъ отвѣтъ на данный вопросъ записывается въ формѣ $^4/_5 \times {}^2/_3 = {}^8/_{15}$ и самому дѣйствію приписывается названіе у м н о ж е н і я.

Чтобы выйти изъ всѣхъ заруднені, связанныхъ съ выясненіемъ понятія объ умноженіи на дробь, необходимо исходить изъ разсмотрѣнія подходящей конкретной задачи, которая рѣшалась бы съ помощью этого дѣйствія. Пусть напр. будетъ взята такая задача: «пѣшеходъ проходитъ 5 верстъ въ каждый часъ; сколько верстъ пройдетъ онъ за $^3/_4$ часа (если будетъ двигаться равномѣрно съ той же скоростью?» Такую задачу учащіеся умѣютъ рѣшить, но двумя дѣйствіями: сперва они узнаютъ, сколько верстъ пройдетъ пѣшеходъ за одну четверть часа ($5:4={}^5/_4$), а затѣмъ найдутъ, сколько верстъ онъ пройдетъ за 3 четверти часа (${}^5/_4 \times 3 = {}^{15}/_4$). Послѣ того, какъ эта задача рѣшена и рѣшеніе ея записано въ двухъ строкахъ, необходимо выяснить учащимся, путемъ наводящихъ вопросовъ, смыслъ произведенныхъ ими дѣйствій (мы нашли четвертую долю отъ 5 и потомъ взяли ее 3 раза слагаемымъ),—а затѣмъ указать, что вмѣсто этого принято говорить короче: «мы умножили 5 на $^3/_4$», и записывать рѣшеніе задачи вмѣсто двухъ строчекъ въ одной: $5 \times {}^3/_4 = {}^{15}/_4$. Подобнымъ же образомъ учащимся нетрудно будетъ сообразить, при помощи наводящихъ вопросовъ учителя, что напр. умножить 10 на $^5/_8$ значить найти восьмую долю отъ 10 и взять ее слагаемымъ 5 разъ, и вообще уразумѣть, что умножить на дробь значитъ взять такую долю множимаго, изъ какихъ состоитъ множитель, и повторить ее слагаемымъ столько разъ, сколько долей въ множителѣ. Затѣмъ они смогутъ установить и правило умноженія на дробь, напр. въ такой формѣ: «чтобы умножить на дробь, нужно умножить данное число на числителя дроби, и полученное раздѣлить на знаменателя». Здѣсь, конечно, необходимо выяснить на конкретныхъ примѣрахъ, что порядокъ указанныхъ дѣйствій—умноженія на числителя и дѣленія на знаменателя—можетъ быть измѣненъ безъ измѣненія получаемаго произведенія.

При такомъ способѣ разработки вопроса учащіеся будутъ понимать смыслъ самаго процесса умноженія на дробь, притомъ въ наиболѣе конкретной формѣ и въ согласіи съ любой научной теоріей дробей. Кромѣ того, для нихъ будетъ сразу ясна одна изъ цѣлей, ради которыхъ вводится предлагаемое условіе; цѣль эта—сокращеніе рѣчи и письма. Слѣдуетъ тутъ же выяснить и другую цѣль, ради которой повтореніе опредѣленной доли даннаго числа носитъ названіе умноженія на дробь; именно, если замѣнить въ условіи разобранной задачи дробное число $^3/_4$ цѣлымъ, напр. 3-мя, то учащіеся увидятъ, что однородная съ данной задача на цѣлыя числа (пѣшеходъ проходитъ по верстъ въ часъ; сколько верстъ пройдетъ онъ за 3 часа?)—рѣшается умноженіемъ на цѣлое число. А если впослѣдствіи учащіеся ознакомятся и съ составленіемъ буквенныхъ формулъ, то они увидятъ, что при этомъ условіи и только благодаря ему однородныя задачи, на умноженіе рѣшаются по одной и той же формулѣ какъ при цѣлыхъ, такъ и при дробныхъ вычисленіяхъ буквъ.

До сихъ поръ здѣсь шла рѣчь объ умноженіи, цѣлаго числа на дробь, такъ какъ на подобномъ примѣрѣ легче всего выяснить дѣтямъ смыслъ умноженія на дробь; когда же этотъ смыслъ уясненъ, нетрудно примѣнить установленную точку зрѣнія и къ случаю умноженія дроби на дробь. Такъ напр. умноженіе $^4/_5$ на $^2/_3$ мы будемъ разсматривать, какъ взятіе одной третьей доли отъ $^4/_5$ ($^4/_5:3=^4/_{15}$) и повтореніе полученнаго числа $^4/_{15}$ два раза слагаемымъ ($^4/_{15}\times2=^8/_{15}$); сравнивъ затѣмъ окончательный результатъ $^8/_{15}$ съ данными числами, мы легко заставимъ учащихся вывести извѣстное правило перемноженія двухъ дробей.

Какъ только усвоено понятіе объ умноженіи на дробь, необходимо распространить его и на случай десятичныхъ дробей (напр. умножить 12 на 0,3 значитъ найти десятую долю 12-ти и затѣмъ взять ее 3 раза). Извѣстное правило умноженія десятичныхъ дробей получается тогда, какъ частный случай правила, установленнаго вообще для дробей. Опытъ показываетъ, что умноженіе на десятичную дробь воспринимается учащимися съ этой точки зрѣнія болѣе легко и сознательно, и они уясняютъ себѣ, что перемноженіе данныхъ чиселъ съ отброшенными запятыми есть, собственно говоря, перемноженіе числителей данныхъ дробей, а постановкою запятой на должномъ мѣстѣ произведенія мы уменьшаемъ полученное число во столько разъ, какъ велико произведеніе знаменателей данныхъ дробей.

Дѣленіе на дробь можетъ быть выяснено пріемомъ, совершенно аналогичнымъ тому, который былъ указанъ для умноженія. Возьмемъ напр. задачу: «Гребецъ проѣхалъ въ лодкѣ 5 верстъ втеченіе $^3/_4$ часа; сколько верстъ онъ могъ бы проѣхать въ часъ, двигаясь съ той же скоростью?» Подобную задачу учащіеся рѣшаютъ двумя дѣйствіями: сперва они узнаютъ, сколько верстъ проѣхалъ бы гребецъ въ одну четверть часа ($5:3=5/3$), а потомъ опредѣляютъ, сколько верстъ онъ могъ бы проѣхать въ часъ ($5/3 \times 4=20/3=6\frac{2}{3}$). Затѣмъ нужно предложить учащимся сдѣлать повѣрку задачи; очевидно для этой цѣли придется рѣшить обратный вопросъ: зная, что гребецъ проплываетъ въ лодкѣ $6\frac{2}{3}$ версты въ часъ, найти, сколько верстъ проплываетъ онъ за $3/4$ часа. Этотъ вопросъ рѣшается умноженіемъ на дробь-($6\frac{2}{3} \times 3/4$), и мы получаемъ въ результатѣ 5. Теперь ясно, что въ первоначальной задачѣ мы искали—и нашли—такое число, которое, будучи умножено на $3/4$, даетъ 5; будемъ, какъ и въ цѣлыхъ числахъ, называть такое число частнымъ данныхъ, а отысканіе его—дѣленіемъ, и запишемъ рѣшеніе нашей задачи такъ: $5:3/4=20/3$, т. е. въ одной строчкѣ вмѣсто двухъ. Сравнивая полученное число съ данными, мы установимъ съ учащимися и правило дѣленія, хотя бы въ такой формѣ: чтобы раздѣлить на дробь, нужно раздѣлить данное число на числителя дроби и полученное умножить на ея знаменателя; при этомъ необходимо выяснить, на данномъ и на другихъ конкретныхъ примѣрахъ, что относительный порядокъ этихъ дѣйствій—дѣленія на числителя и умноженія на знаменателя—не вліяетъ на окончательный результатъ.

Затѣмъ необходимо показать что сдѣланные выводы могутъ быть распространены и на тѣ случаи, когда приходится рѣшать вопросы, сколько разъ одно дробное число содержится въ другомъ, или какую часть одного числа составляетъ другое. Для этой цѣли пригодна напр. такая задача: «на отдѣлку шляпы идетъ $^3/_4$ аршина ленты; на сколько такихъ шляпъ хватитъ 6 аршинъ этой ленты»? Рѣшая эту задачу непосредственно, учащіеся найдутъ сперва, сколько четвертей аршина содержится въ 6 аршинахъ ($4 \times 6 = 24$), а затѣмъ—сколько разъ 3 четверти аршина содержатся въ 24 четвертяхъ аршина ($24:3=8$); или могутъ разсуждать такъ: еслибы на каждую шляпу выходила 1 четверть аршина ленты, то одного аршина хватило бы на 4 шляпы, а 6 аршинъ—на 4×6, или 24 шляпы; но такъ какъ на каждую шляпу идетъ не $^1/_4$ арш. ленты, а въ 3 раза больше—то тѣмъ же количествомъ ленты можно отдѣлать не 24 шляпы, а въ 3 раза меньше, т. е. $24:3=8$. Затѣмъ дѣлается провѣрка задачи и оказывается, что искомое въ ней число (8), будучи перемножено съ $^3/_4$, даетъ 6; поэтому мы называемъ его частнымъ данныхъ чиселъ и будемъ писать по предыдущему $6:{}^3/_4=8$.

Какъ и при разборѣ умноженія, слѣдуетъ показать учащимся, что однородныя съ данными задачи на цѣлыя числа рѣшаются дѣленіемъ на цѣлое число; а затѣмъ необходимо распространить установленныя условія и на случай дѣленія дроби на дробь. Такъ напр. дѣленіе $^4/_5$ на $^3/_8$ мы будемъ понимать, какъ отысканіе такого числа, которое, будучи перемножено съ $^3/_8$, даетъ въ результатѣ $^4/_5$. Иначе говоря, $^3/_8$ искомаго числа равны $^4/_5$; $^1/_8$ искомаго числа должна быть въ 3 раза меньше $^4/_5$, т. е. равна $^4/_{15}$; а все искомое число должно быть въ 8 разъ больше полученной дроби, т. е. равно $^{32}/_{5}$. Сравнивая полученное число съ данными, выводимъ извѣстное правило дѣленія дроби на дробь.

Далѣе всѣ сдѣланные выводы должны быть распространены на случай дѣленія на десятичную дробь. Дѣленіе на десятичную дробь лучше всего разсматривать какъ частный случай дѣленія на дробь вообще: напр. при дѣленіи 2 на 0,3 мы должны умножить 2 на знаменателя данной дроби, т. е. на 10, и полученное число 20 раздѣлить на числителя 3: имѣемъ $2:0,3=20:3=6^{2}/_{3}$; при дѣленіи 0,002 на 0,03 мы должны умножить 0,002 на знаменателя второй дроби, т. е. на 100, и полученное число 0,2 раздѣлить на числителя 3; найдемъ частное 0,0666... Такимъ образомъ мы легко выяснимъ учащимся, что дѣленіе на десятичную дробь можетъ быть приведено къ дѣленію на цѣлое число.

Этимъ исчерпываются, собственно говоря, всѣ основные вопросы методики курса дробей. Періодическихъ дробей, разумѣется, нѣтъ надобности вводить въ начальную школу, какъ вслѣдствіе ихъ практической безполезности, такъ и потому, что вопросъ объ обращеніи ихъ въ простыя дроби не можетъ быть изложенъ на данной ступени обученія безъ крупныхъ логическихъ натяжекъ. Равнымъ образомъ не должно быть мѣста въ начальной школѣ и такъ называемымъ тройнымъ правиламъ: всѣ необходимыя задачи этого рода—на пропорціональныя величины и на процентныя вычисленія—съ успѣхомъ рѣшаются по соображенію, и мы не должны обременять начальный курсъ ариѳметики этими остатками схоластики, отъ которой освобождается теперь и наша средняя школа.

ГЛАВА V.

Обученіе геометріи въ начальной школѣ.

Старая программа начальныхъ школъ не давала учащимся никакихъ познаній геометрическаго характера; даже изученіе квадратныхъ и кубическихъ мѣръ признавалось этой программой необязательнымъ, хотя и весьма желательнымъ, особенно въ сельскихъ школахъ. Что знакомство съ измѣреніемъ поверхностей и объемовъ является насущнымъ вопросомъ житейской практики, такъ какъ напр. сельскому населенію постоянно приходится сталкиваться съ вопросомъ объ измѣреніи земельныхъ участковъ—въ этомъ не можетъ быть никакого сомнѣнія. Но въ настоящее время нельзя уже ограничиваться въ начальной школѣ однимъ только изученіемъ квадратныхъ и кубическихъ мѣръ, а слѣдуетъ расширить сообщаемыя свѣдѣнія до размѣровъ небольшого курса геометріи, изучаемаго неразрывно со счисленіемъ. За такое расширеніе говорятъ какъ практическія, такъ и педагогическія соображенія; съ одной стороны для практическихъ цѣлей недостаточно умѣть измѣрять только прямолинейныя длины или прямоугольные объемы и площади: практика жизни требуетъ напр. умѣнья измѣрить площадь треугольника, трапеціи, длину окружности или площадь круга, найти объемъ призмы, цилиндра или шара; съ другой стороны, знаніе геометрическихъ соотношеній позволяетъ въ высокой степени разнообразить матеріалъ для ариѳметическихъ задачъ, присоединяя къ обычному математическому обиходу учащихся обширную группу вопросовъ, близко связанныхъ съ жизнью; наконецъ, изученіе естествознанія и географіи, да и самой ариѳметики по конкретно-индуктивному и трудовому методу требуетъ нѣкоторыхъ познаній и измѣрительныхъ навыковъ геометрическаго характера.

Я постараюсь теперь намѣтить группу вопросовъ изъ области геометріи, которые мнѣ представляются наиболѣе подходящими для изученія въ начальной школѣ, при четырехлѣтнемъ курсѣ.

Первоначальныя свѣдѣнія о простѣйшихъ геометрическихъ формахъ (напр. понятіе о шарѣ, кубѣ, прямоугольномъ брускѣ) и объ измѣреніи длины дѣти пріобрѣтаютъ еще въ дошкольный періодъ жизни и въ первый годъ обученія, когда имъ приходится имѣть дѣло и съ кубиками ариѳметическаго ящика, и съ числовыми фигурами, и съ нагляднымъ изображеніемъ простѣйшихъ дробей съ помощью частей прямоугольника, и круга и съ простѣйшими мѣрами длины. Затѣмъ уже во второмъ году обученія небезполезно знакомить дѣтей съ дѣленіемъ прямоугольника и квадрата на квадратныя клѣтки и со счетомъ этихъ клѣтокъ; подобный счетъ квадратовъ въ прямоугольной или квадратной площади служитъ какъ подготовкой къ измѣренію площадей, такъ и хорошимъ упражненіемъ и нагляднымъ средствомъ для усвоенія таблицы умноженія. Въ третій же годъ обученія слѣдуетъ расширить, углубить и систематизировать геометрическія познанія и навыки, пріобрѣтенные до той поры; здѣсь учащіеся должны ознакомиться съ важнѣйшими геометрическими тѣлами (кубъ, прямоугольная призма, пирамида, шаръ, цилиндръ, конусъ) и ихъ гранями (прямоугольникъ, квадратъ, треугольникъ, многоугольникъ, кругъ, окружность), и съ основными геометрическими понятіями—о плоской и кривой поверхности, прямой и кривой линіи, о прямыхъ горизонтальныхъ и вертикальныхъ, о прямыхъ пересѣкающихся и параллельныхъ; объ углахъ—прямыхъ, острыхъ и тупыхъ; о перпендикулярныхъ и наклонныхъ прямыхъ линіяхъ и т. п.; и наконецъ нужно изучить съ дѣтьми измѣреніе прямоугольныхъ площадей и объемовъ, ограниченныхъ прямоугольными стѣнками, и вмѣстѣ съ этимъ—квадратныя и кубическія мѣры, какъ русскія, такъ и метрическія. Въ четвертый годъ тогда будетъ возможн расширить и дополнить свѣдѣнія объ измѣреніи длинъ, поверхностей и объемовъ—изучить измѣреніе площади параллелограмма, треугольника, трапеціи; длины окружности и площади круга, поверхностей и объемовъ прямой призмы, цилиндра, конуса и шара, а равно и тѣлъ неправильной формы; наконецъ, дать понятіе объ измѣреніи угловъ градусами.

Если же школа располагаетъ пятымъ годомъ обученія, то въ нее можно внести еще новый циклъ свѣдѣній геометрическаго характера: о равенствѣ и подобіи фигуръ, о соотношеніи между сторонами и площадями подобныхъ фигуръ, о съемкѣ плановъ, о наглядномъ изображеніи пропорціональныхъ величинъ (съ вычерчиваніемъ діаграммъ и график) о числовой и геометрической зависимости между сторонами прямоугольнаго треугольника (теорема Пиоагора) и т. д., съ приложеніемъ къ рѣшенію цѣлаго ряда практическихъ и интересныхъ вопросовъ.

Всякій согласится съ тѣмъ, что усвоеніе предлагаемаго курса свѣдѣній и навыковъ геометрическаго характера даетъ учащимся возможность выполнять многіе практическіе разсчеты; они смогутъ напр. измѣрить и вычислить площадь участка земли, количество сѣмянъ для засѣва поля или грядки, стоимость окраски пола, оклейки обоями стѣны, количество досокъ для настилки пола, бревенъ для постройки, кирпичей для дома; объемъ ямы для посадки дерева, вырытой канавы; количество сложенныхъ дровъ, кирпичей, сѣна въ сараѣ; вмѣстимость ящика, комнаты, дома; количество желѣза, приходящагося на крышу, на ведро, на жолобъ трубы, стоимость окраски или позолоты церковнаго купола и т. д. Предложенная программа можетъ вызвать вопросы только въ двухъ отношеніяхъ: во первыхъ, откуда взять время на выполненіе ея наряду съ ругими отдѣлами школьной математики, и во вторыхъ, какимъ методомъ она должна быть разрабатываема?

Время можно найти, если исключить изъ школьной практики разныя ненужныя и громоздкія упражненія надъ составными именованными числами и «натаскиваніе» учащихся въ рѣшеніи «задачъ по типамъ» и сложныхъ и неуклюжихъ задачъ «повторительнаго» характера. Составныя именованныя числа слѣдуетъ вообще не выдѣлять въ особый отдѣлъ, а изучать параллельно съ соотвѣтствующими дѣйствіями надъ отвлеченными числами, такъ какъ по существу дѣйствія надъ тѣми и другими числами совершаются по однимъ и тѣмъ же правиламъ; въ задачахъ же не слѣдуетъ задавать составныхъ именованныхъ чиселъ, содержащихъ болѣе двухъ видовъ смежныхъ мѣръ: дѣло въ томъ, что въ практическихъ разсчетахъ никогда не употребляются многосоставныя именованныя данныя, такъ какъ измѣренія не производятся съ такой точностью, чтобы можно было опредѣлять золотники при пудахъ или дюймы при верстахъ; а кромѣ того, для упрощенія разсчетовъ стараются вообще избѣгать дѣйствія надъ составными именованными числами, замѣняя ихъ при случаѣ простыми именованными или же дробями—не говорятъ напр. «4 саж. 2 арш.» сукна, а 14 арш. сукна, и вмѣсто 2 арш. 8 вершк. предпочитаютъ сказать $2^1/_2$ аршина; въ техническихъ разсчетахъ сажень дѣлятъ обыкновенно даже не на аршины и вершки, а на десятыя и сотыя доли. Поэтому смѣшно читать напр. задачи такого сорта: «У мѣдника было 7 пуд. 5 ф. 31 л. 1 зол. 48 дол. мѣди; изъ $^1/_3$ части ея онъ сдѣлалъ нѣсколько самоваровъ вѣсомъ по 11 ф. 29 л. 90 дол. каждый, а изъ остальной мѣди приготовилъ нѣсколько кастрюль, употребивъ на каждую по 5 ф. 30 л. 1 зол. 93 доли. Сколько тѣхъ и другихъ вещей сдѣлано мѣдникомъ»? (сборникъ задачъ Борисова и Сатарова, 12-е изд., вып. III, № 224),—или: «Надо замостить два шоссе: одно длиною въ 142 версты 4 саж. 2 ф. 7 дюйм., а другое—въ 73 версты 3 саж. 5 ф. 10 дюйм. На сколько первое шоссе длиннѣе второго»? (Новый ариѳметическій задачникъ для городскихъ и сельскихъ начальныхъ училищъ Соколова и Сахарова, ч. III, № 267).

Вмѣсто упражненія въ подобныхъ вычисленіяхъ и громоздкихъ задачахъ «повторительнаго» характера гораздо цѣлесообразнѣе пройти краткій курсъ свѣдѣній по геометріи, что даетъ возможность ввести въ школьную практику разнообразныя практическія задачи изъ области измѣреній, близкія к жизни и интересныя для дѣтей. Въ тѣхъ школахъ, гдѣ введено обученіе рисованію, нѣкоторыя свѣдѣнія изъ облости геометріи сообщаются и примѣняются и на урокахъ рисованія. Наконецъ, предложенная программа курса геометріи весьма эластична, и по желанію учителя можетъ быть сокращаема или расширяема въ зависимости отъ подготовки и развитія дѣтей и другихъ условій жизни школы.

Что же касается вопроса о методѣ обученія начаткамъ геометріи, то, конечно, въ начальной школѣ не можетъ быть и рѣчи о дедуктивномъ курсѣ геометріи, въ которомъ изъ нѣсколькихъ основныхъ положеній, опредѣленій и условій выводились бы чисто логически всѣ остальныя изучемыя истины. Усвоеніе начатковъ геометріи должно совершаться конкретно, съ помощью изученія предметовъ окружающей обстановки и моделей геометрическихъ тѣлъ, склеиванія и вылѣпливанія такихъ моделей по указаніямъ учителя, изготовленія чертежей, вырѣзыванія геометрическихъ фигуръ изъ бумаги, производства измѣреній на мѣстности и тому подобныхъ способовъ нагляднаго ознакомленія со свойствами геометрическихъ объектовъ. Только при такомъ способѣ обученія можно разсчитывать на то, что изучаемыя свойства пространства и его частей будутъ ясно представляться умственному взору учащихся и будутъ усвоены ими сознательно.

Вотъ какъ напр. можно было бы проводить ознакомленіе дѣтей со свойствами куба, прямоугольной призмы и ихъ граней. Первымъ предметомъ изъ окружающей обстановки, который придется въ данномъ случаѣ поближе изучить, будетъ классная комната. Учитель начинаетъ съ того, что предлагаетъ дѣтямъ измѣрить длину и ширину, а затѣмъ и вышину комнаты (измѣрять можно приблизительно, напр. съ точностью до четверти или до половины аршина; при измѣреніи вышины нѣтъ надобности, конечно, влѣзать на потолокъ, а достаточно достать до него палкой). Затѣмъ учитель предлагаетъ изобразить на чертежѣ, въ уменьшенномъ видѣ, полъ этой комнаты; съ этой цѣлью учащіеся на листѣ бумаги, разграфленной на крупныя клѣтки, должны вычертить прямую линію въ столько клѣтокъ или другихъ единицъ длины (дюймовъ, сантиметровъ), сколько аршинъ занимаетъ полъ комнаты въ длину; затѣмъ отмѣрить такимъ же образомъ ширину и изобразить остальные края пола. Послѣ этого непосредственно рядомъ съ выполненнымъ чертежемъ пола, вправо и влѣво, вверхъ и внизъ, вычерчиваются такимъ же образомъ стѣнки комнаты, далѣе рядомъ внизу или вверху—потолокъ; получается чертежъ всей комнаты въ развернутомъ видѣ. Затѣмъ учитель предлагаетъ вырѣзать этотъ чертежъ и склеить изъ него изображеніе комнаты въ маломъ видѣ; съ этой цѣлью къ частямъ чертежа, изображающимъ стѣнки и потолокъ, предварительно причерчиваются вспомогательныя полоски для склеиванія; вырѣзавъ и склеивъ чертежъ, учащіеся получаютъ коробку съ прямоугольными стѣнками, которая и будетъ желаемой моделью комнаты. Чтобы все это было выполнено удачно, необходимо вычерчивать выкройку комнаты на плотной бумагѣ или гибкомъ картонѣ; необходимо, чтобы вся выкройка умѣстилась на одномъ листѣ, а для этого учитель долженъ заранѣе вымѣрять размѣры комнаты и разсчитать, какимъ числомъ «клѣтокъ» или другихъ единицъ измѣренія нужно изобразить каждый аршинъ, чтобы весь чертежъ умѣстился на одномъ листѣ и не былъ въ то же время слишкомъ малъ. Вырѣзываніе и склеиваніе дѣти выполняютъ въ первое время въ классѣ подъ руководствомъ учителя, а впослѣдствіи и какъ самостоятельное упражненіе въ классѣ и дома. Когда коробка склеена, дѣти изучаютъ ея важнѣйшія свойства (напр. что стѣнокъ въ ней 6, причемъ противоположныя одинаковы, краевъ или реберъ 12, изъ нихъ одинаковы тѣ, что лежатъ между противоположными стѣнками; вершинъ 8, и т. д.); затѣмъ учитель можетъ показать и деревянную модель прямоугольной призмы и сообщить, что такой предметъ называется прямоугольной призмой или прямоугольнымъ брускомъ. Далѣе учитель предлагаетъ назвать различные предметы, похожіе на прямоугольную коробку или брусокъ (сундукъ, шкапъ, ящикъ, книга и т. д.). Послѣ этого учащіеся рисуютъ еще разъ нижнюю грань коробки, учитель напоминаетъ, что полученная фигура называется прямоугольникомъ и проситъ назвать нѣсколько предметовъ, похожихъ на прямоугольникъ (полъ и потолокъ комнаты, дворъ, листъ бумаги, доска и т. д.); въ видѣ упражненія вычерчивается на клѣтчатой бумагѣ еще нѣсколько прямоугольниковъ по заданнымъ размѣрамъ, напр. измѣряется длина и ширина классной доски и чертится въ маломъ видѣ соотвѣтствующій прямоугольникъ.

Подобнымъ образомъ проводится и изученіе куба. Учитель показываетъ учащимся модель куба и заставляетъ измѣрить его длину, ширину и вышину; затѣмъ чертится выкройка куба и склеивается. Изучая кубъ, учащіеся знакомятся также и съ квадратомъ.

Въ такомъ же духѣ можетъ быть проведено ознакомленіе и съ остальными геометрическими тѣлами (пирамида, цилиндръ, конусъ) и ихъ частями; тутъ же выясняется понятіе о плоской и кривой поверхности, о прямой и кривой линіи, о горизонтальныхъ и вертикальныхъ плоскостяхъ и прямыхъ.

Понятіе объ углѣ и сравненіе угловъ по величинѣ выясняется также конкретно, при помощи вырѣзокъ изъ бумаги. Прямой уголъ лучше всего опредѣлять здѣсь какъ уголъ между горизонтальной и вертикальной прямой линіей, или всякій другой, ему равный; такое объясненіе является болѣе конкретнымъ и доступнымъ учащимся, чѣмъ теоретическое понятіе о прямомъ углѣ, какъ объ одномъ изъ двухъ равныхъ смежныхъ угловъ.

Точно также понятіе о параллельныхъ прямыхъ легче всего дается учащимся, если разсматривать ихъ какъ такія прямыя, которыя вездѣ находятся на одинаковомъ разстояніи другъ отъ друга; чѣмъ при обычномъ ихъ геометрическомъ опредѣленіи (какъ прямыхъ линій, лежащихъ въ одной плоскости и нигдѣ не пересѣкающихся).

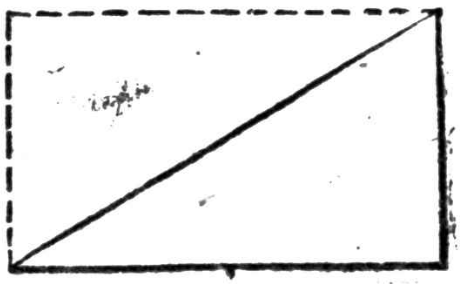
Когда учащіеся такимъ образомъ освоились съ основными геометрическими понятіями и пріобрѣли должный навыкъ въ изготовленіи моделей и въ вычерчиваніи изучаемыхъ фигуръ и линій, можно перейти съ ними къ изученію вопроса объ измѣреніи площадей и объемовъ. Для выясненія площадей учитель можетъ поступить такъ. Сперва онъ показываетъ дѣтямъ двѣ одинаковыхъ прямоугольныхъ бумажныхъ полосы, лучше всего разноцвѣтныя, и спрашиваетъ, которая больше; помощью наложенія учащіеся убѣждаются, что полосы равны. Затѣмъ показываются двѣ полосы, первая изъ которыхъ имѣетъ большую длину и большую ширину, чѣмъ вторая; снова помощью наложенія учащіеся убѣждаются, что первая полоса больше. Наконецъ учитель показываетъ двѣ полосы, одна изъ которыхъ имѣетъ большую длину, но меньшую ширину, чѣмъ другая, напр. одну полосу въ 6 вершк. длины и 2 вершк. ширины, другую въ 4 вершк. длины и 3 вершк. ширины; попытавшись ихъ наложить другъ на друга, учащіеся видятъ, что наложеніемъ нельзя определить, которая изъ нихъ больше. Тогда учитель беретъ такія же двѣ полосы, но разграфленныя на квадратныя клѣтки по 1 кв. вершку, и снова предлагаетъ учащимся сообразить, которая больше. Если они не догадаются пересчитать, сколько въ каждой помѣщается клѣтокъ, то учитель самъ задаетъ этотъ вопросъ, причемъ предлагаетъ провѣрить, одинаковы ли клѣтки; для этого берется отдѣльный квадратный вершокъ и накладывается поочередно на клѣтки площади. Послѣ этого можетъ быть поведена приблизительно такая бесѣда: показывая снова первую пару полосъ, учитель спрашиваетъ: «Какъ мы узнали, что эти полосы одинаковы?—Мы ихъ наложили одну на другую. А какъ мы узнали, которая изъ этихъ полосъ больше (показываетъ вторую пару)?—Тоже наложили.—А про эти (показываетъ на послѣднюю пару) какъ узнали, что онѣ одинаковы?—Мы ихъ раздѣлили на одинаковыя клѣтки, и сосчитали, сколько клѣтокъ». Далѣе учитель обращаетъ вниманіе дѣтей на то, что клѣтки, на которыя раздѣлены послѣднія двѣ полосы, суть квадраты длиной и шириной въ одинъ вершокъ, и сообщаетъ имъ, что такой квадратъ называется квадратнымъ вершкомъ. Небезполезно послѣ этого велѣть учащимся изготовить квадратные вершки (или раздать имъ для образца готовые, если приходится дорожить временемъ); затѣмъ учитель предлагаетъ дѣтямъ изготовить полосу длиной, положимъ, въ 5 вершковъ, а шириной въ 1 вершокъ, и разграфить ее на квадратные вершки (для этого достаточно отмѣтить простые вершки по длинѣ вверху и внизу и соединить соотвѣтствующія точки дѣленія). Учащіеся убѣждаются на этомъ и другихъ подобныхъ примѣрахъ, что квадратныхъ вершковъ въ полосѣ будетъ столько, сколько обыкновенныхъ вершковъ въ длинѣ ея. Затѣмъ берется нѣсколько такихъ разграфленныхъ полосъ, имѣющихъ ширину въ 1 вершокъ, и одинаковую длину—положимъ, 4 полосы, имѣющія по 5 вершк. въ длину. Онѣ прикрѣпляются къ классной доскѣ (кнопками) одна подъ другой, и образуется прямоугольникъ длиной въ 5 вершк. и шириной въ 4 вершк. Теперь нетрудно уже довести учащихся до пониманія сути дѣла съ помощью такой напр. бесѣды: «Сколько квадратныхъ вершковъ во всемъ прямоугольникѣ?—20.—Какъ это мы нашли?—Въ каждой полосѣ 5 кв. вершк., а всѣхъ полосъ 4; 5 разъ 4—20.—Что выражаетъ здѣсь число 5?—Сколько квадратныхъ вершковъ въ каждой полосѣ, или сколько вершковъ въ длинѣ всего прямоугольника—Что обозначаетъ число 4?—Сколько полосъ, или сколько вершковъ въ ширинѣ прямоугольника.—Значитъ, какъ же мы вычислили, сколько будетъ квадратныхъ вершковъ во всемъ прямоугольникѣ?—Перемножили число, показывающее длину, на число показывающее ширину. Послѣ нѣсколькихъ подобныхъ примѣровъ учащіеся уясняютъ общій пріемъ и правило вычисленія площади прямоугольника. Кстати сказать, отнюдь не слѣдуетъ спѣшить сообщать имъ сокращенную форму этого правила: «помножить длину на ширину», такъ какъ это можетъ повести къ путаницѣ въ наименованіяхъ; при вычисленіи площади по правилу мы множимъ отвлеченныя числа, и лишь затѣмъ приписываемъ результату наименованіе въ квадратныхъ мѣрахъ; если же приписывать наименованіе и къ даннымъ числамъ, то придется писать такъ: 5 кв. верш. $\times$ 4=20 кв. вершк., а не 5 вершк. $\times$4 вершк.=20 кв. вершк. Правда, съ чисто научной точки зрѣнія мы имѣемъ право говорить и о произведеніи именованныхъ чиселъ, и запись 5 вершк. $\times$4 вершк.=20 кв. вершк. будетъ имѣть вполнѣ опредѣленный смыслъ, если мы условимся подъ умноженіемъ именованнаго числа на именованное разумѣть составленіе числа новаго, напередъ опредѣленнаго наименованія, заключающаго столько единицъ, сколько получится отъ умноженія соотвѣтствующихъ отвлеченныхъ чиселъ. Но при этомъ, конечно, самое слово «умноженіе» получаетъ совершенно не тотъ смыслъ, какой мы ему приписываемъ въ ариѳметикѣ, и если подобное условіе имѣетъ свое значеніе и формальную цѣлесообразность въ математической наукѣ, то было бы совершенно несвоевременно говорить о немъ въ начальной школѣ при изученіи квадратныхъ мѣръ.

Слѣдуетъ тутъ же ознакомить учащихся и съ вычисленіемъ площади квадрата; они такимъ образомъ лишній разъ убѣдятся, что квадратъ можно разсматривать какъ прямоугольникъ съ одинаковой длиной и шириной. Затѣмъ можно перейти къ изученію дальнѣйшихъ квадратныхъ мѣръ: кв. аршина, кв. сажени и т. д. Квадратный аршинъ и другія небольшія мѣры (кв. футъ, дюймъ) можно сдѣлать изъ бумаги съ разграфленіемъ на меньшія мѣры, квадратную сажень можно вычертить на полу или на дворѣ, десятину и даже квадратную версту—показать на окружающей школу мѣстности.

Заучивать, сколько въ квадратномъ аршинѣ квадратныхъ вершковъ—нѣтъ надобности; но знать способъ вычисленія этихъ единичныхъ отношеній необходимо, тѣмъ болѣе, что всѣ эти случаи представляютъ примѣры на вычисленіе площади квадрата.

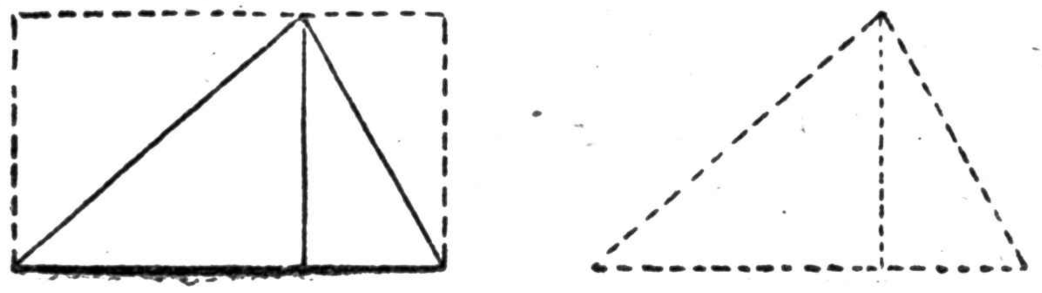
Методъ, примѣненный при изученіи квадратныхъ мѣръ, можетъ быть проведенъ при изученіи кубическихъ мѣръ, именно слѣдуетъ начать съ вмѣстимости подходящимъ образомъ подобранныхъ коробокъ или ящиковъ. Сперва учитель можетъ дать для сравненія двѣ коробки, изъ которыхъ одна замѣтно менѣе другой, такъ что можетъ въ ней помѣстится; дѣти безъ труда найдутъ, которая больше. Послѣ этого слѣдуетъ дать коробки, которыхъ нельзя сравнить непосредственно, напр. такія: длина, ширина и вышина одной пусть будутъ соотвѣтственно 5, 3 и 2 вершка, а другой—6, 4 и 1 вершокъ. Ихъ нельзя вложить одну въ другую цѣликомъ: но если заполнить каждую ку биками, имѣющими въ длину, ширину и вышину по вершку, то въ первую войдетъ такихъ кубиковъ 30, а во вторую только 24, и тѣмъ самымъ ясно обнаружится, что вторая меньше. Вмѣстѣ съ тѣмъ выясняется, что для сравненія объемовъ приходится узнавать, сколько разъ въ каждомъ изъ нихъ помѣщается опредѣленный кубикъ, именно кубическій вершокъ. Послѣ этого учащіеся знакомятся съ кубическимъ вершкомъ, а затѣмъ учитель предлагаетъ имъ изготовить изъ бумаги открытыя коробки, длиной напр. въ 5 вершк., а шириной и вышиной по 1 вершку, затѣмъ раздѣлить ихъ бумажными перегородками на кубическіе вершки; разсматривая такія коробки, учащіеся убѣдятся, что въ нихъ помѣстится по столько кубическихъ вершковъ, сколько линейныхъ вершковъ въ ихъ длинѣ. Если затѣмъ учащіеся возьмутъ нѣсколько такихъ коробокъ, напр. 4, и поставятъ ихъ рядомъ (для удобства можно склеить ихъ или сшить), то получится новая коробка длиной въ 5 вершк., шириной въ 4 вершк. и вышиной въ 1 вершокъ; будетъ ясно, что вмѣстимость такой коробки равна 20 кубич. вершкамъ. Наконецъ, взявъ нѣсколько подобныхъ коробокъ, напр. 2, и поставивъ ихъ другъ на друга, учащіеся получатъ прямоугольный ящикъ длиной въ 5 вершк., шириной въ 4 вершк. и вышиной въ 2 вершк. Ясно, что объемъ такого ящика равенъ 40 кубич. вершкамъ, послѣ чего нетрудно установить и правило вычисленія объема.

Въ четвертый годъ обученія пріобрѣтенныя свѣдѣнія объ измѣреніи площадей и объемовъ должны быть возможно болѣе расширены. Вопросъ о площади треугольника можно разобрать такъ. Предварительно надо ознакомить учащихся съ понятіемъ объ основаніи и высотѣ треугольника и научить ихъ проводить высоту въ треугольникѣ при помощи наугольника, или просто перегибаніемъ, если треугольникъ вырѣзанъ изъ бумаги; при этомъ надо, чтобы дѣти уяснили себѣ при помощи ряда подходящихъ упражненій, какъ располагаются высоты въ треугольникахъ различнаго вида (остроугольномъ, прямоугольномъ, тупс-



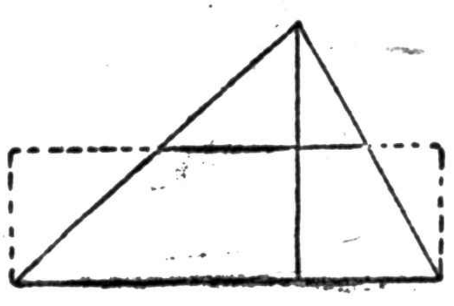
Черт. 3.

угольномъ). Затѣмъ можно дать имъ убѣдиться, что прямоугольный треугольникъ составляетъ половину прямоугольника съ тѣмъ же основаніемъ и высотой; для этого достаточно, чтобы учащіеся, вырѣзавъ изъ бумаги два одинаковыхъ прямоугольныхъ треугольника, сложили ихъ потомъ большими сторонами вмѣстѣ (см. черт. 3). Затѣмъ можно обнаружить то же самое относительно любого треугольника: пусть учащіеся вырѣжутъ треугольникъ изъ бумаги и еще другой, равный ему; затѣмъ во второмъ треугольникѣ проводится высота (перегибаніемъ выкройки) и онъ разрѣзывается по высотѣ, а части его прикладываются къ первому треугольнику, какъ показано на черт. 4; ясно, что изъ двухъ нашихъ треугольниковъ складывается прямоугольникъ съ тѣмъ же основанiемъ и высотой, значитъ каждый треугольникъ составляетъ половину прямоугольника.



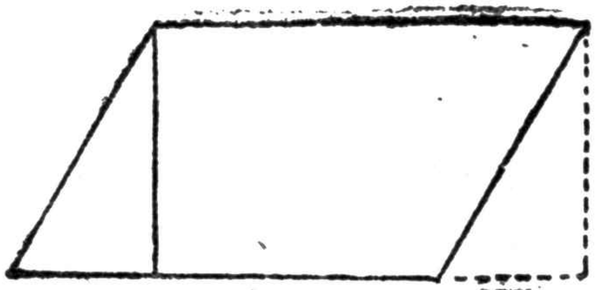
Черт. 4.

Можно превратить треугольникъ въ равновеликiй ему прямоугольникъ и непосредственно. Для этого вырѣжемъ треугольникъ, проведемъ въ немъ (перегибанiемъ) высоту, а также найдемъ при помощи сгибанiя середины боковыхъ сторонъ (черт. 5); потомъ согнемъ весь треугольникъ по линiи, соединяющей середины этихъ сторонъ (она называется **средней линiей**), отрѣжемъ верхнюю части треугольника разрѣжемъ ее по высотѣ и приложимъ полученныя части къ боковымъ сторонамъ оставшейся фигуры, какъ показано на чертежѣ пунктиромъ; ясно, что изъ нашего треугольника получился прямоугольникъ съ тѣмъ же основанiемъ, но съ высотой вдвое меньшей, чѣмъ у треугольника.



Черт. 5.

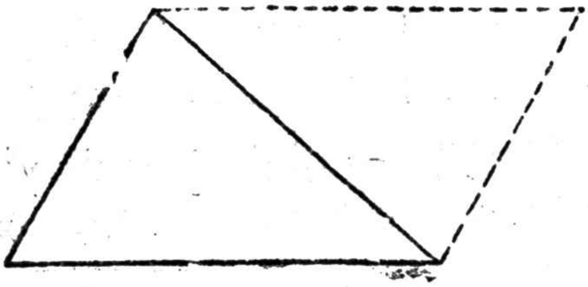
Далѣе можно ознакомиться съ параллелограммомъ и съ измѣреніемъ его площади. При этомъ лучше называть данную фигуру не параллелограммомъ, а косоугольникомъ, потому что это названіе проще и легче усваивается дѣтьми. Нужно, чтобы дѣти уяснили себѣ, что косоугольникъ—это четыреугольникъ, стороны котораго попарно параллельны; при этомъ онидолжны убѣдиться наложеніемъ, что въ косоугольникѣ противоположныя стороны равны и противоположные углы также равны, и должны научиться проводить въ немъ высоту наугольникомъ или съ помощью перегибанія. Послѣ этого можно ознакомить



Черт. 6.

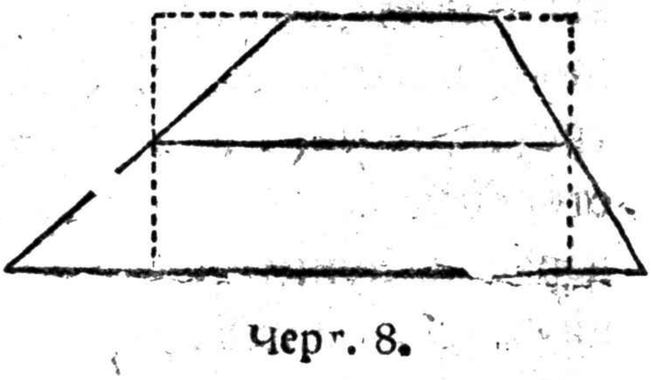
и съ измѣреніемъ площади косоугольника; пусть они вырѣжутъ косоугольникъ изъ бумаги, проведутъ въ немъ высоту (черт. 6) и отрѣжутъ образовавшійся треугольникъ, а затѣмъ переложатъ его по другую сторону оставшейся фигуры, какъ обозначено на чертежѣ пунктиромъ; будетъ ясно, что изъ косоугольника получился прямоугольникъ съ такимъ же основаніемъ и такой же высотой.

Зная, какъ мѣряется площадь косоугольника, учащіеся могутъ еще другимъ способомъ провѣрить правило вычисленія площади треугольника; именно вырѣзать изъ бумаги два одинаковыхъ треугольника и сложивъ ихъ, какъ показано на черт. 7, они убѣдятся, что изъ этихъ двухъ треугольниковъ образовался косоугольникъ; значитъ треугольникъ составляетъ половину косоугольника (а слѣдовательно и прямоугольника) съ тѣмъ же основаніемъ и высотой.



Черт. 7.

Площадь трапеціи можно опредѣлить, разбивая его діагональю на два треугольника, или же такъ: вырѣзавъ изъ бумаги трапецію (черт. 8), находимъ у нея сгибаніемъ середины боковыхъ сторонъ и перегибаемъ всю фигуру по линіи, соединяющей эти середины (эта прямая называется с р е д н е й л и н і е й трапеціи), потомъ проводимъ изъ концовъ этой линіи перпендикуляры на нижнее основаніе (опять же перегибаніемъ), отрѣзываемъ образовавшіеся крайніе треугольники и перекладываемъ ихъ наверхъ, какъ отмѣчено на чертежѣ пунктиромъ; получается изъ трапеціи прямоугольникъ, основаніе котораго равно средней линіи трапеціи, а высота одинакова съ высотой трапеціи.



Черт. 8.

Площадь всякаго многоугольника дѣти смогутъ опредѣлить, разбивая его на треугольники діагоналями.

Само собою разумѣется, что всѣ эти свѣдѣнія о фигурахъ должны сопровождаться упражненіями въ соотвѣтствующихъ измѣреніяхъ, выполненіи чертежей и рѣшеніи задачъ практическаго характера.

Въ вопросѣ объ измѣреніи длины окружности самое важное, конечно, установить, что всякая окружность длиннѣе своего діаметра въ одно и то же число разъ, именно въ $3^1/_7$ раза (приблизительно); это учащіеся могутъ найти, измѣряя окружности и діаметры разныхъ круглыхъ предметовъ и сравнивая полученныя числа дѣленіемъ. Напр. измѣреніе окружности и діаметра мѣднаго пятака даетъ возможность найти указанное отношеніе съ точностью до 0,01, т. е. получить число 3, 14; длину окружности можно вымѣрять ниткой, а чтобы опредѣлить діаметръ, кладутъ пятакъ на бумагу, обводятъ его очень тонко очиненнымъ карандашомъ, вырѣзываютъ изъ бумаги полученный кружокъ и перегибаютъ его пополамъ; линія перегиба и есть діаметръ.

Чтобы опредѣлить площадь круга, можно поступить такъ: разрѣзать кругъ на узкіе секторы (напр. на 24 или 32 сектора, которые предварительно намѣчаются сгибаніемъ круга) и сложить ихъ такъ, чтобы они, какъ зубцы, пришлись другъ между другомъ; образуется фигура, очень похожая на параллелограммъ; безъ большой ошибки можно принять ее за параллелограммъ, основаніе котораго будетъ такимъ образомъ равно половинѣ длины окружности, (т.-е. $3^1/_7$ радіуса), а высота—радіусу; отсюда выходитъ, что площадь круга въ $3^1/_7$ раза больше площади квадрата, каждая сторона котораго равна радіусу круга. Этотъ выводъ полезно провѣрить взвѣшиваніемъ: если взять напр. круглую мѣдную пластинку и другую квадратную такой же толщины и такого же матеріала, причемъ сторона квадратной пластинки равнялась бы радіусу круглой,—то круглая будетъ вѣсить приблизительно въ $3^1/_7$ раза больше квадратной.

Для сравненія объемовъ тѣлъ различной формы пригодны либо деревянныя модели, разбирающіяся по частямъ, либо пустыя внутри и съ одной стороны открытыя жестяныя модели, которыя можно наполнять водою или пескомъ, либо даже открытыя картонныя модели, въ которыя можно насыпать песокъ, (ихъ легче всего сдѣлать самимъ учащимся). Помощью такихъ моделей учащіеся могутъ удостовѣриться, что напр. прямыя призмы, имѣющія одинаковыя высоты и одинаковыя по площади основанія, будутъ имѣть равные объемы независимо отъ формы основанія; что объемъ цилиндра приблизительно въ $3^1/_7$ раза больше объема прямоугольной призмы, имѣющей ту же высоту, а въ основаніи—квадратъ со стороной, равной радіусу цилиндра; что объемъ конуса въ три раза меньше объема цилиндра съ тѣмъ же основаніемъ и высотой, а объемъ шара въ полтора раза меньше объема цилиндра, радіусъ котораго равенъ радіусу шара, а высота—діаметру шара, и т. д.—

Боковая поверхность цилиндра измѣряется легко, такъ какъ ее можно развернуть на плоскости, и мы получимъ прямоугольникъ, высота котораго равна высотѣ цилиндра, а основаніе—длинѣ окружности цилиндра. Точно также и боковая поверхность конуса развертывается на плоскости, и получается круговой секторъ, радіусъ котораго равенъ образующей конуса; можно разрѣзать и этотъ круговой секторъ на узкіе секторы и превратить его такимъ образомъ въ фигуру, похожую на параллелограммъ, какъ это дѣлали при нахожденіи площади круга; основаніе этого параллелограмма приблизительно равно длинѣ полуокружности основанія конуса, а высота—образующей конуса.

Что же касается поверхности шара, то ее на плоскости развернуть нельзя, и для приблизительнаго измѣренія ея употребляется довольно сложный пріемъ: обматываютъ поверхность деревяннаго полушара бичевкой, закрѣпляя ее постепенно булавками; затѣмъ обматываютъ той же бичевкой боковую поверхность цилиндра, радіусъ котораго равенъ радіусу шара, и высота тоже равна радіусу; оказывается, что въ обоихъ случаяхъ на обматываніе поверхности идетъ поровну бичевки, слѣд. поверхность полушара равна боковой поверхности указаннаго цилиндра.

Наконецъ, можно научить дѣтей измѣрять объемы небольшихъ тѣлъ неправильной формы, вкладывая эти тѣла въ измѣрительный стаканъ съ водой и замѣчая, насколько поднимается уровень воды; точно также приблизительно измѣряется и небольшія площади неправильной формы, если наложить на нихъ прозрачную миллиметровую сѣтку и сосчитать число квадратныхъ миллиметровъ, занятое данной фигурой.

Приложенiе

УКАЗАТЕЛЬ

Литературы по обученiю математике въ начальной школе.

УКАЗАТЕЛЬ

литературы по обученію математикѣ въ начальной школѣ.

Современная литература, касающаяся начальнаго обученія математикѣ, хорошо отражаетъ картину перелома, переживаемаго методикой этого предмета. Съ одной стороны, въ ней замѣтна неудовлетворенность традиціонными методами обученія, замѣтно стремленіе приблизить обученіе къ потребностямъ и запросамъ дѣтской души, поставить его въ соотвѣтствіе съ данными психологической науки, достигнуть наибольшей сознательности въ усвоеніи изучаемаго, дать наибольшій просторъ дѣтской самодѣятельности, сблизить какъ можно больше «счетную мудрость» съ явленіями жизни въ самомъ широкомъ смыслѣ слова. Чувствуется при этомъ, что стремленіе усовершенствовать методы обученія счету и измѣреніямъ не возникло особнякомъ, что оно тѣсно связано съ общимъ педагогическимъ движеніемъ нашего времени, со стремленіемъ усовершенствовать всѣ стороны нашей школы, поставить школу на уровень требованій современной жизни. Съ другой стороны, можно замѣтить и тѣ отрицательныя черты, которыя присущи у насъ всякой эпохѣ перелома: и излишнюю подражательность, погоню за новыми и модными словами, и недостаточно критическое отношенiе къ прiемамъ заграничной педагогики, и наряду съ этимъ процвѣтанiе рутины, давнымъ давно уже рѣшительно осужденной.

Размѣры настоящей книжки не позволяютъ дать исчерпывающаго обзора всѣхъ трудовъ, имѣющихъ отношенiе къ обученiю математикѣ въ начальной школѣ Поэтому я ограничусь только указанiями на тѣ сочиненiя, которыя въ большей или меньшей степени заслуживаютъ вниманiя учителя и могутъ быть ему такъ или иначе полезны въ его самообразованiи или школьной практикѣ *).

I. Общiе вопросы методики математики и современныя экспериментально-педагогическiя изслѣдованiя въ области воспрiятiя числа и начальнаго обученiя счисленiю.

* *Шохоръ-Троцкiй*. Начальная математика. Методы первоначальнаго обученiя (статья въ изданiи «Педагогическая Академiя въ очеркахъ и монографiяхъ», изд. книгоиздательства «Польза», Москва 1910 г.).

Въ данной статьѣ изложены психологическiя основы и существенныя черты конкретно индуктивнаго

---

*) Звѣздочкой отмѣчены тѣ сочиненiя, ознакомленiе съ которыми рекомендуется въ первую очередь, для того чтобы [illegible] вопроса.

метода обученія начальной математикѣ, и указаны въ общихъ чертахъ тѣ пріемы, съ помощью которыхъ онъ долженъ проводиться на практикѣ. Статья эта особенно цѣнна для учителя какъ введеніе въ сущность современной методики.

Юнгъ. Какъ преподавать математику (перев. съ англійскаго подъ ред. *Кулишера*, изд. т-ва «Общественная Польза въ Птгр., вып. I и II, 1912—14 г.).

Авторъ этой книги—профессоръ методики математики въ одномъ изъ американскихъ университетовъ (въ Чикáго), сторонникъ реформы современнаго преподаванія въ смыслѣ сближенія его съ жизнью. Его сочиненіе касается преподаванія математики преимущественно въ средней школѣ, но въ первой части разсматриваются и общіе вопросы методики математики, интересные и для учителей начальной школы.

* *Володкевичъ*. Къ вопросу о реформѣ преподаванія математики. (изд. книгоиздательства «Сотрудникъ», Птгр.—Кіевъ 1910 г.).

Это небольшая брюшора, разсматривающая главнымъ образомъ вопросъ о методѣ обученія геометріи на начальной ступени школы, но вмѣстѣ съ тѣмъ въ ней изслѣдуются и психологическія предпосылки метода обученія математикѣ вообще, и даются свѣдѣнія о заграничномъ реформаціонномъ движеніи въ этой области.

Лебединцевъ. Методъ обученія математикѣ въ старой и новой школѣ (собраніе статей по вопросамъ преподаванія математики, изд. Горбунова-Посадова, Москва 1914 г.).

Въ этой брошюрѣ автора данныхъ строкъ разсматриваются вопросы о цѣли и методѣ обученія математикѣ и о современныхъ экспериментально психологическихъ изслѣдованіяхъ въ области воспріятія числа, а также и нѣкоторые частные вопросы обученія математикѣ.

Лай. Руководство къ первоначальному обученію ариѳметикѣ, основанное на результатахъ дидактическихъ опытовъ (перев. съ нѣм. подъ ред. *Волковскаго*, изд. Сытина).

Одинъ изъ видныхъ трудовъ современной литературы, въ которомъ для русскаго читателя важнѣе всего экспериментально-психологческія изслѣдованія автора въ области воспріятія числа, а также данныя о числовыхъ представленіяхъ и системахъ счисленія у первобытныхъ народовъ.

Мейманъ. Лекціи по экспериментальной педагогикѣ, ч. III (перев. съ нѣм. подъ ред. Виноградова, изд. т-ва «Міръ», Москва 1910 г.).

Въ этой части капитальнаго курса Меймана, являющагося однимъ изъ лучшихъ сочиненій по экспериментальной педагогикѣ, разбираются вопросы относительно обученія чтенію, письму, рисованію и счисленію на первоначальной ступени; послѣднему вопросу посвящена особая глава (лекція 16-я), въ которой дѣлается сводка важнѣйшихъ экспериментальыхъ изслѣдованій въ данной области и излагаются бс твенные выводы автора по этому вопросу.

II. **История математики и ея методики.**

* *Беллюстинъ.* Какъ постепенно дошли люди до настоящей ариѳметики. (изд. журнала «Педагогическій Листокъ», Москва 1909 г.)).

Книга написана просто и живо, и даетъ читателю ясное представленіе о развитіи счисленія и системы мѣръ въ Россіи.

Для болѣе полнаго ознакомленіе съ исторіей математики можно рекомендовать слѣдующій трудъ:

Кэджори. Исторія элементарной математики (перев. съ англ. *Тимченко,* изд. «Mathesis», Одесса 1910 г.).

По исторіи русской методики математики заслуживаютъ вниманія труды Галанина, а именно:

Галанинъ. Магницкій и его ариѳметика, ч. I и II.

Галанинъ. Исторія методическихъ идей по ариѳметикѣ въ Россіи, ч. I (XVIII вѣкъ).

III. **Книги для учителя по методикѣ ариѳметики и начальной геометріи, а также и тѣ руководства, которыя могутъ быть использованы учителемъ въ практикѣ начальной школы.**

* *Шохоръ-Троцкій.* Методика ариѳметики для учителей начальныхъ школъ, въ двухъ частяхъ (изд. 8-е и 9-е, Сытина, Москва 1916).

Обширный и основательный трудъ, содержащій какъ разработку теоретическихъ положеній, такъ и практическія указанія для учителя въ духѣ конкретно-индуктивнаго метода.

* *Волковскій*. Руководство къ «Дѣтскому міру въ числахъ», ч. I и II (изд. Сытина, Москва 1914—15 г.).

Подробное и основательное методическое руководство, составленное примѣнительно къ задачнику того же автора «Дѣтскій міръ въ числахъ»; содержитъ основныя свѣдѣнія по важнѣйшимъ теоретическимъ вопросамъ и рядъ конкретныхъ указаній для учителя; въ книгѣ имѣются также систематическій подборъ задачъ для учителя (для классной разработки) и многочисленныя указанія на литературу предмета.

* *Эрнъ*. Очерки по методикѣ ариѳметики (Рига 1912 г., изд. автора). Оригинальный и цѣнный трудъ, содержащій обзоръ современныхъ теченій въ методикѣ ариѳметики и разработку основныхъ ея вопросовъ по преимуществу съ теоретической стороны. Заслуживаетъ еще вниманія статья того же автора подъ названіемъ «Спорные вопросы въ методикѣ ариѳметики» (журналъ «Математическое Образованіе», изд. Московскимъ математическимъ кружкомъ, 1912 г. № № 3 и 4).

* *Куперштейнъ*. Записки по методикѣ ариѳметики, съ приложеніемъ задачника для учителей (ч. I, изд. книжн. магаз. Золотарева, Елисаветградъ 1909 г.; вторая часть этого труда вышла тамъ же подъ названіемъ: *Куперштейнъ* и *Шалытъ*. Записки по методикѣ ариѳметики).

Цѣнная методика практическаго характера, съ хорошимъ подборомъ задачъ для классной разработки; трудъ имѣетъ въ виду преимущественно обученіе ариѳметикѣ въ городскихъ училищахъ, и задачи взяты изъ обстановки, окружающей дѣтей этихъ школъ; но методическія указанія одинаковы примѣнимы во всѣхъ начальныхъ школахъ.

Изъ числа методическихъ руководствъ, вышедшихъ въ свѣтъ уже давно, но не утратившихъ до сихъ поръ своей педагогической ценности, заслуживаютъ наибольшаго вниманія труды Гольденберга и Беллюстина:

Гольденбергъ. Методика начальной ариѳметики.

Гольденбергъ. Бесѣды по счисленію (посмертное изд. Саратовскаго губ. земства 1906 г., подъ ред. *Волковскаго*).

Беллюстинъ. Методика ариѳметики (изд. кн. маг. Наумова въ Москвѣ, въ четырехъ частяхъ).

Изъ числа переводныхъ сочиненій можно рекомендовать следующія книги:

**Лезанъ.* Новые пути ознакомленія дѣтей съ математикой (перев. съ франц. *Шараповой*, изд. Горбунова-Посадова, Москва 1909 г.).

Это сочиненіе не приноровлено къ программѣ какой либо школы, но содержитъ рядъ указаній, какъ излагать вопросы изъ самыхъ различныхъ областей математики въ такой форме, чтобы они дѣлались наиболѣе понятными, доступными и интересными для дѣтей. Очень цѣнная книжка для учителя.

* *Мартель.* Пріемы быстраго счета (перев. съ франц. *Мироносицкаго*, изд. журнала «Народное Образованіе», Птгр. 1909 г.).

Очень цѣнная книжка, дающая много указаній на пріемы быстраго счета и примѣненіе ихъ въ школѣ.

**Герлахъ.* Какъ преподавать дѣтямъ ариѳметику въ духѣ творческаго воспитанія (перев. съ нѣм., изд. Горбунова-Посадова, Москва 1911 и 1918 г.).

Эта интересная книга даетъ много полезныхъ указаній насчетъ того, какъ поставить обученіе счисленію въ прямую связь съ дѣтской жизнью, съ дѣтскими играми и трудомъ. Русскій переводъ печатался сначала въ видѣ статей въ журналѣ «Свободное Воспитаніе»; затѣмъ первый выпускъ его вышелъ отдѣльнымъ изданіемъ въ 1911 г., а теперь выходитъ и остальная часть.

Штѳклинъ. Методика ариѳметики (перев. съ нѣм. подъ ред. *Волковскаго*, изд. Сытина, ч. I—III).

Авторъ книги—одинъ изъ выдающихся педагоговъ нѣмецкой Швейцаріи, и его методика, въ общемъ солидно и обстоятельно разработанная, даетъ возможность русскому читателю познакомиться съ постановкой обученія ариѳметикѣ въ этой странѣ; нѣкоторые же практическіе пріемы примѣнимы и въ нашей школѣ. Наряду съ «Методикой» вышли изъ печати и «Ариѳметическіе задачники» того же автора, въ восьми выпускахъ (первый изъ нихъ подъ названіемъ «Азбука ариѳметики).

Уэнтуортъ и Ридъ. Первоначальная ариѳметика (перев. съ англ. подъ ред. *Волковскаго*, изд. Сытина, Москва 1912 г.).

Это задачникъ для учителя, приноровленный для американскихъ начальныхъ школъ; интересенъ, какъ матеріалъ для ознакомленія съ постановкой дѣла въ этихъ школахъ, а нѣкоторые пріемы примѣнимы и у насъ.

По методикѣ начальной геометріи обращаютъ на себя вниманіе слѣдующія книги:

* *Беллюстинъ.* Методика геометріи (изд. кн. маг. Наумова въ Москвѣ).

Небольшая книжка, полезная, какъ введеніе въ методику геометріи.

* *Кулишеръ.* Методика и дидактика подготовительнаго курса геометріи (изд. кн-ва «Общественная Польза» въ Птгр., 1916 г.).

Обстоятельное руководство, разсматривающее какъ теоретическую, такъ и практическую сторону вопроса; снабжено также указаніями на литературу предмета.

Шохоръ-Троцкій. Геометрія на задачахъ. Книга для учителей начальныхъ школъ съ продолжительнымъ курсомъ; низшихъ и среднихъ классовъ среднеучебныхъ заведеній, профессіональныхъ школъ и курсовъ и т. п. (изд. Сытина, Москва 1908 г., въ двухъ частяхъ).

Курсъ геометріи, предлагаемый въ этомъ трудѣ, для начальной школы слишкомъ обширенъ, но рядъ практическихъ пріемовъ по разработкѣ геометрическаго матеріала можетъ быть съ успѣхомъ использованъ учителемъ. Имѣется и «Книга для учащихся» того же автора подъ тѣмъ же названіемъ, представляющая сборникъ задачъ для самостоятельныхъ упражненій учащихся.

* *Астрябъ.* Наглядная геометрія (изд. кн-ва «Сотрудникъ», Птгр.—Кіевъ, 1909 г.).

Это—руководство геометріи для начальныхъ школъ и младшихъ классовъ среднихъ учебныхъ заведеній, изложенное въ видѣ послѣдовательнаго ряда практическихъ задачъ и пригодное для обученія по конкретно индуктивному методу.

Извольскій. Начальный курсъ геометріи (изд. кн-ва «Школа» Москва).

Эта книга тоже содержитъ рядъ указаній на пріемы, которыя могутъ быть использованы въ курсѣ геометріи въ начальной школѣ.

* *Бэр.* Начатки опытной геометріи въ приложеніи къ измѣренію линій, поверхностей и тѣлъ (перев. съ франц. подъ ред. *Гатлиха,* изд. Сытина въ Москвѣ).

Небольшая, но интересная книжечка. Пріемы измѣреній могутъ быть использованы и въ практикѣ нашихъ школъ.

Кэмпбелль. Наглядная геометрія (перев. съ англ *Попова,* изд. Горбунова-Посадова, Москва 1908 г.).

Это курсъ геометріи для американскихъ школъ, интересно составленный и дающій указанія для конкретной разработки геометрическаго матеріала съ дѣтьми.

Сундра Роу. Геометрическія упражненія съ кускомъ бумаги (перев. съ англ., изд. «Mathesis», Одесса.)

Авторъ книжечки—индусъ, написавшій свое сочиненіе на англійскомъ языкѣ; въ книжкѣ этой говорится о приложеніи «метода сгибанія бумаги» къ наглядному уясненію многихъ геометрическихъ истинъ; есть немало интересныхъ пріемовъ.

IV. Задачники для учащихся.

Изъ многочисленной литературы по данному вопросу я укажу здѣсь только тѣ труды, которые наиболѣе заслуживаютъ вниманія учителя и наиболѣе отвѣчаютъ потребностямъ современной школы:

Волковскій. Дѣтскій міръ въ числахъ для начальныхъ школъ (изд. Сытина, Москва 1914—18 г.; въ трехъ выпускахъ—сообразно тремъ первымъ годамъ обученія).

Зенченко и Эменовъ. Жизнь и знаніе въ числахъ. Деревня. Систематическій сборникъ задачъ для четвертаго отдѣленія начальной школы (изд. Ворошиловой, Москва 1915 г.; при задачникѣ издано отдѣльной брошюрой краткое руководство для учителей къ пользованію книгой; предвидится выходъ изъ печати и первыхъ трехъ частей задачника съ соотвѣтствующими указаніями для учителя).

Звягинцевъ и Бернашевскій. Живой счетъ (изд. Сытина, въ трехъ выпускахъ; есть особыя изданія этого задачника для сельскихъ и для городскихъ школъ).

Цунзеръ и Горбунова. Живыя числа. Наглядная ариѳметика для школы и семьи, (изд. Горбунова-Посадова, руководство для первоначальнаго обученія счисленію въ предѣлѣ первой сотни).

Куперштейнъ. Сборникъ ариѳметическихъ задачъ и примѣровъ, предназначенный исключительно для самостоятельной работы дѣтей (изд. Золотарева въ Елисаветградѣ, содержитъ упражненія и задачи въ предѣлѣ первой сотни).

Корзуновъ. Ариѳм. задачникъ для начальныхъ училищъ (изд. кн-ва Спиридонова, Москва; въ трехъ выпускахъ).

Изъ задачниковъ, изданныхъ давно, но не утратившихъ до сихъ поръ своихъ достоинствъ, слѣдуетъ назвать труды Гольденберга и Беллюстина:

Гольденбергъ. Сборникъ ариѳметическихъ задачъ и упражненій для начальныхъ школъ.

Беллюстинъ. Ариѳметическій задачникъ для начальныхъ школъ.

V. Математическія развлеченія.

Аменицкій и Сахаровъ. Забавная ариѳметика, вып. I—III (изд. Сытина).

Изъ сочиненій этого рода наиболѣе подходитъ для надобности начальной школы, но пользоваться этой книгой приходится съ осмотрительностью, такъ какъ нѣкоторыя задачи несвободны отъ существенныхъ промаховъ.

Игнатьевъ. Въ царствѣ смекалки, ч. I—III. Математическая хрестоматія.

Приноровлена для учащихся среднихъ школъ, но первая часть ея пригодна и для надобностей начальной школы. Одинъ изъ лучшихъ трудовъ въ данной области.

Есть еще переводныя книги:

Шубертъ. Математическія развлеченія и игры (перев. съ нѣм., изд. «Mathesis», Одесса).

Аренсъ. Математическія развлеченія и игры (перев. съ нѣм., изд. «Физика»).

Тромгольтъ. Игры со спичками (перев. съ нѣм., изд. Mathesis»).

ОГЛАВЛЕНІЕ.